



Physik im Tennis

Analyse ausgewählter Aspekte der Ballbewegungen
unter physikalischen Gesichtspunkten

Facharbeit von

Lukas Friedrich

Gymnasium Petrinum

Leistungskurs Physik

Herr Leymann

Jahrgangstufe Q1

Schuljahr 2019/2020

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
Physikalische Theorie der grundlegenden Ballbewegung beim Tennis	3
Analyse der Flugbahn eines Tennisballs ohne Spin	4
Berücksichtigung des Einflusses des Luftwiderstands	5
Analyse der Flugbahn eines Balls mit Spin	9
Der Magnus-Effekt	9
Rückbezug zur Fragestellung	11
Fazit und Ausblick	12
Anhang	13
Literaturverzeichnis	48

Einleitung

Tennis ist eine beliebte Sportart, die ich auch selbst aktiv im Verein betreibe. Viele Aspekte des Tennissports lassen sich mit physikalischen Gesetzmäßigkeiten in Verbindung bringen und mit ihnen erklären. Diese Zusammenhänge haben mich schon seit Längerem interessiert. Deshalb möchte ich im Rahmen meiner Facharbeit verschiedene Bewegungsformen des Tennisballs darstellen und analysieren sowie – auch mit Blick auf ihre Bedeutung im Tennisspiel - erklären. Somit lässt sich diese Facharbeit dem physikalischen Teilgebiet der Mechanik zuordnen.

Ziel beim Tennis ist es, den Tennisball mit dem Schläger so ins gegnerische Feld zu schlagen, dass der Gegner ihn nicht mehr regelgerecht zurückspielen kann. Dabei darf der Ball direkt in der Luft oder nach einmaligem Auftreffen auf den Boden innerhalb des Spielfeldes zurückgeschlagen werden.

Aus physikalischer Sicht geht es beim Tennis um Bewegungen, insbesondere um Geschwindigkeiten, um Kräfte und um Energieumwandlungen. Eine wichtige Rolle spielen dabei neben der Beschaffenheit von Ball und Schläger auch der Belag des Platzes sowie die Technik, mit der der Ball geschlagen wird.

In meiner Facharbeit möchte ich die Frage

Wie können physikalische Gesetzmäßigkeiten bei der Ausführung verschiedener Schlagtechniken im Tennis vorteilhaft genutzt werden?

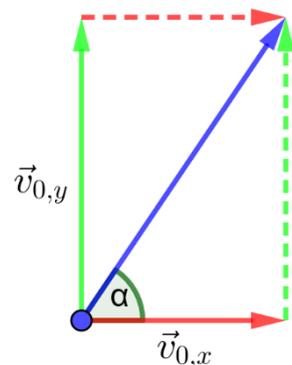
untersuchen und so weit wie möglich beantworten.

Dazu werde ich exemplarisch verschiedene Bahnkurven von unterschiedlich geschlagenen Tennisbällen mit Hilfe eines Videoanalyseprogramms auswerten, die relevanten physikalischen Grundlagen erläutern und für die Erklärung der Ballbewegungen nutzen.

Physikalische Theorie der grundlegenden Ballbewegung beim Tennis

Aus dem Unterricht sind mir zum Beschreiben von mechanischen Bewegungen bereits der waagerechte Wurf und der senkrechte Wurf bekannt. Da der Tennisball allerdings in den meisten Fällen schräg nach oben geschlagen wird, kann weder der waagerechte noch der senkrechte Wurf allein diese Flugbahn beschreiben. Vielmehr handelt es sich um eine Kombination der beiden Bewegungen.

Deshalb betrachtet man eine Zerlegung der Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 in ihre horizontale und ihre vertikale Kom-



ponente $\vec{v}_{0,x}$ und $\vec{v}_{0,y}$. In y-Richtung ergibt sich somit unter Berücksichtigung der beschleunigten Bewegung nach unten aufgrund der Erdbeschleunigung g für die Geschwindigkeit die Formel $\vec{v}_y = \vec{v}_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t$. Dabei ist α der Winkel zwischen $\vec{v}_{0,x}$ und \vec{v}_0 . In horizontaler Richtung gilt für die Geschwindigkeit demnach die Formel $\vec{v}_x = \vec{v}_0 \cdot \cos(\alpha)$. Daraus ergeben sich für das Zeit-Ort-Gesetz die beiden Formeln $x(t) = \vec{v}_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$ und $y(t) = y_0 + \vec{v}_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$. Um die Flugbahn des Balls mit Hilfe der Bahngleichung zu beschreiben, muss man jetzt die Gleichung $x(t)$ nach der Zeit t umformen und das Ergebnis in die Gleichung $y(t)$ einsetzen. Durch Umformen erhält man $t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}$ und somit $y(x) = y_0 + \tan(\alpha) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} \cdot x^2$.

Analyse der Flugbahn eines Tennisballs ohne Spin

Um die Theorie der grundlegenden Ballbewegung beim Tennis zu untersuchen, schlägt man den Tennisball ohne Spin, also so, dass dieser möglichst wenig um die eigene Achse rotiert.

Für das Filmen der Flugbahn eignen sich Schläge, bei denen der Ball im sogenannten T-Feld auftrifft, besonders gut. Als T-Feld bezeichnet man die beiden vorderen Felder auf der jeweiligen Seite vom Netz, die auch als Aufschlagfelder genutzt werden. Dort kann man sich an der Linie, die die beiden Aufschlagfelder in der Mitte teilt, orientieren, da diese genau 6,4 m lang ist. Um die Bewegung besser analysieren zu können, sollte man die Videosequenzen in Zeitlupe aufnehmen. Dann können die einzelnen Positionen des Balls besser ermittelt werden. In diesem Fall wurden die zu analysierenden Videosequenzen um das Achtfache verlangsamt.

Bei dem aufgenommenen Schlag hat sich somit mit Hilfe einer Ausgleichskurve durch die im Video bestimmten Positionen die Bahnkurve $y(x) = -0,12 \cdot x^2 + 0,62 \cdot x + 0,89$ ergeben (siehe Anhang Seite 14). Um diese Bahnkurve mit der des schiefen Wurfes zu vergleichen, benötigt man den Winkel α , in dem der Ball geschlagen wurde, die Höhe y_0 , in der der Ball geschlagen wurde, sowie die Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 . Die Höhe y_0 entspricht dabei dem y-Achsenabschnitt der durch das Videoanalyseprogramm Viana.NET angegebenen Bahnkurve. Zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 kann man die ebenfalls von dem Videoanalyseprogramm angegebenen Funktionen $x(t) = 0,84 \cdot t - 11,68$ (siehe Anhang Seite 15) und $y(t) = -0,082 \cdot t^2 + 2,81 \cdot t - 22,39$ (siehe Anhang Seite 16) verwenden, da die Funktion $x(t)$ die horizontale Position des Balls in Abhängigkeit von der Zeit angibt und die Funktion $y(t)$ die vertikale

Position des Balls in Abhängigkeit von der Zeit angibt. Die jeweiligen Ableitungen der Funktionen geben also die zeitliche Änderungsrate der Funktionen und damit $v_x(t)$ und $v_y(t)$ an. Durch Einsetzen der Startzeit, in diesem Falle 14,03 Sekunden, erhält man also $\vec{v}_{0,x}$ und $\vec{v}_{0,y}$. Da diese beiden Anfangsgeschwindigkeiten den beiden Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck entsprechen (siehe Abbildung 1), gilt der Satz des Pythagoras und man erhält für \vec{v}_0 die Formel: $v_0 = \sqrt{v_{0,x}^2 + v_{0,y}^2}$, welche in diesem Fall konkret $v_0 = \sqrt{\left(6,72 \frac{m}{s}\right)^2 + \left(4,08 \frac{m}{s}\right)^2} = 7,86 \frac{m}{s}$ ergibt. Auch der Winkel α lässt sich mithilfe der beiden Anfangsgeschwindigkeiten $\vec{v}_{0,x}$ und $\vec{v}_{0,y}$ bestimmen, da man ihn in dem rechtwinkligen Dreieck mit der Formel $\alpha = \arctan\left(\frac{v_{0,y}}{v_{0,x}}\right)$ berechnen kann. Bei dem betrachteten Schlag entspricht der Winkel, in dem der Ball geschlagen wurde, also $\alpha = \arctan\left(\frac{4,08 \frac{m}{s}}{6,72 \frac{m}{s}}\right) = 31,26^\circ$. Daraus ergibt sich nach der oben aufgestellten Formel

für die theoretische Bahnkurve:

$$y(x) = 0,89m + \tan(31,26^\circ) \cdot x - \frac{9,81 \frac{m}{s^2}}{\left(2 \cdot 7,86 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot (\cos(31,26^\circ))^2} \cdot x^2$$

Vergleicht man die tatsächliche Bahnkurve des Schlags, welche durch die Ausgleichskurve des Videoanalyseprogramms dargestellt wird, mit der Bahnkurve, die nach dem schiefen Wurf gelten müsste, fällt auf, dass der Ball in horizontaler Richtung kürzer fliegt, als es die theoretische Bahnkurve vorsieht. (siehe Anhang Seite 13)

Berücksichtigung des Einflusses des Luftwiderstands

Man stellt also bei der Videoanalyse verschiedener Tennisschläge schnell fest, dass die tatsächlichen Bahnkurven der meisten Tennisbälle nicht mit den theoretisch nach den Gesetzmäßigkeiten des schrägen Wurfs berechneten Verläufen übereinstimmen. Die Bälle treffen nämlich in der Regel nach einer kürzeren in horizontaler Richtung zurückgelegten Wegstrecke auf dem Boden auf.

Einen ersten und naheliegenden Erklärungsansatz für diese Beobachtung kann man in der Berücksichtigung des Einflusses des Luftwiderstands des Tennisballs suchen.

Die Luft umströmt den Ball im Flug. Aufgrund der Viskosität, anschaulicher kann man auch von Zähigkeit sprechen, bilden sich hinter dem fliegenden Ball Luftwirbel. Diese Wirbel erzeugen ihrerseits sogenannte Wirbelschleppen in der Luft hinter dem Ball. Als Ergebnis dieser Zusammenhänge wird dem fliegenden Ball aufgrund des Luftwider-

stands Energie entzogen. Somit wird der Ball – gegenüber der Betrachtung ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands – verlangsamt.

Eine sehr detaillierte Analyse von Ballbewegungen nimmt Metin Tolan in seinem im Jahr 2010 erschienenen Buch „So werden wir Weltmeister – Die Physik des Fußballspiels“ [1] vor. Er begründet, dass der Luftwiderstand für einen realen, also mit einer rauen Oberfläche ausgestatteten, Fußball in guter Näherung proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ansteigt.

Auf dieser Grundlage erscheint die Annahme sinnvoll, auch für einen Tennisball, der ebenfalls eine raue Oberflächenstruktur aufweist, von dieser Abhängigkeit des Luftwiderstands von der Geschwindigkeit auszugehen.

Da die Luftwirbel ihre Energie von der des Balls erhalten, wird der Ball dadurch verlangsamt. Die Richtung der Luftwiderstandskraft ist der Bewegungsrichtung des Balls entgegengesetzt.

Die Kraft des Luftwiderstands lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$F_L = \frac{1}{2} c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \quad [1, \text{S.200}]$$

Der c_w - Wert ist der Widerstandskoeffizient, der von der Form eines Körpers abhängt und experimentell bestimmt wird. Für einen Tennisball gilt: $c_w = 0,4$

ρ : Dichte der Luft ($1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ bei 20°C) [1, S.200]

A: Flächeninhalt des Querschnitts des Körpers senkrecht zur Bewegungsrichtung

Der Durchmesser des Tennisballs beträgt 6,7 cm und damit hat er eine Querschnittsfläche von $A = 35,26 \text{ cm}^2$.

v: Geschwindigkeit des Körpers

Die Masse eines Tennisballs habe ich mithilfe einer Waage ermittelt. Es gilt: $m = 57,6 \text{ g}$

Mit $k = \frac{1}{2} c_w \cdot \rho \cdot A$ gilt: $F_L = k \cdot v^2$.

Beim Tennisball erhält man für k den Wert $k = 0,5 \cdot 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,4 \cdot 0,003526 \text{ m}^2 = 0,000846 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$.

Zerlegt man die Bewegung des Tennisballs in eine horizontale und eine vertikale Bewegung, so gilt für die Bewegung in x-Richtung: $F = ma = -kv^2$ (Die Luftwiderstandskraft ist die einzige auf den Ball wirkende Kraft in x-Richtung. Da sie entgegen der Bewegungsrichtung wirkt, ist sie negativ zu berücksichtigen.)

Für die Bewegung in y-Richtung erhält man entsprechend: $F = ma = -kv^2 - mg$. Diese Gleichung gilt, bis der Ball den höchsten Punkt erreicht hat. Danach wirkt die Kraft $F = ma = kv^2 - mg$.

Ersetzt man die Beschleunigung a durch die Ableitung der Geschwindigkeit $v'(t)$, so erhält man jeweils eine Differentialgleichung.

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen führen auf folgende Funktionen zur Berechnung des Ortes des Balls zum Zeitpunkt t . Dabei bezeichnet t_u den Zeitpunkt, an dem der Ball den höchsten Punkt, den Umkehrpunkt, erreicht hat und seine Richtung umkehrt, $v_{0,x}$ die Startgeschwindigkeit in x-Richtung und entsprechend $v_{0,y}$ die Startgeschwindigkeit in y-Richtung. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt hier im Startpunkt des Balls.

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{v_\infty^2}{g} \cdot \begin{pmatrix} \ln\left(1 + \frac{v_{0,x} \cdot g \cdot t}{v_\infty^2}\right) \\ \ln\left(\cos\left(\frac{g(t_u - t)}{v_\infty}\right)\right) - \ln\left(\cos\left(\frac{gt_u}{v_\infty}\right)\right) \end{pmatrix} & \text{für } t \leq t_u \\ \frac{v_\infty^2}{g} \cdot \begin{pmatrix} \ln\left(1 + \frac{v_{0,x} \cdot g \cdot t}{v_\infty^2}\right) \\ -\frac{g(t - t_u)}{v_\infty} - \ln\left(\frac{1 + e^{\frac{2g(t-t_u)}{v_\infty}}}{2} \cdot \cos\left(\frac{gt_u}{v_\infty}\right)\right) \end{pmatrix} & \text{für } t \geq t_u \end{cases}$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad \text{und} \quad t_u = \frac{v_\infty}{g} \cdot \arctan\left(\frac{v_{0,y}}{v_\infty}\right) \quad , \text{ entnommen aus [2]}$$

Um aus diesen Funktionen die Bahnkurve des Tennisballs unter Berücksichtigung des Luftwiderstands zu berechnen, löst man die x-Koordinate nach der Zeit t auf und ersetzt in der Funktion für den Ort in y-Richtung das t durch den erhaltenen Term. Bei der Auswertung der Videos zur Bahnbewegung des Tennisballs ist es sinnvoll, die x-Achse

auf den Hallenboden zu legen. Dadurch ergibt sich eine Starthöhe y_0 , um die die berechnete Bahnkurve nach oben verschoben werden muss.

$$x = \frac{v_\infty^2}{g} \cdot \ln \left(1 + \frac{v_{0,x} \cdot g \cdot t}{v_\infty^2} \right) \Leftrightarrow \frac{g \cdot x}{v_\infty^2} = \ln \left(1 + \frac{v_{0,x} \cdot g \cdot t}{v_\infty^2} \right) \Leftrightarrow e^{\frac{g \cdot x}{v_\infty^2}} = 1 + \frac{v_{0,x} \cdot g \cdot t}{v_\infty^2} \Leftrightarrow t = \frac{v_\infty^2}{v_{0,x} \cdot g} \cdot \left(e^{\frac{g \cdot x}{v_\infty^2}} - 1 \right)$$

Für $t \leq t_u$ folgt:

$$y(x) = \frac{v_\infty^2}{g} \cdot \left(\ln \left(\cos \left(\frac{g \left(t_u - \frac{v_\infty^2}{v_{0,x} \cdot g} \cdot \left(e^{\frac{g \cdot x}{v_\infty^2}} - 1 \right) \right)}{v_\infty} \right) \right) - \ln \left(\cos \left(\frac{g t_u}{v_\infty} \right) \right) \right) + y_0$$

Für $t \geq t_u$ gilt:

$$y(x) = \frac{v_\infty^2}{g} \cdot \left(- \frac{g \left(\frac{v_\infty^2}{v_{0,x} \cdot g} \cdot \left(e^{\frac{g \cdot x}{v_\infty^2}} - 1 \right) - t_u \right)}{v_\infty} - \ln \left(\frac{1 + e^{-\frac{2g \left(\frac{v_\infty^2}{v_{0,x} \cdot g} \cdot \left(e^{\frac{g \cdot x}{v_\infty^2}} - 1 \right) - t_u \right)}}{v_\infty}}{2} \cdot \cos \left(\frac{g t_u}{v_\infty} \right) \right) \right) + y_0$$

Für den Tennisball errechnet man: $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}} = 25,84 \frac{m}{s}$

Um jetzt die tatsächliche Bahnkurve mit der Bahnkurve, die den Luftwiderstand mit einbezieht, zu vergleichen, muss zunächst der Umkehrpunkt t_u berechnet werden, da dieser notwendig ist, um die Funktion für die Bahnkurve mit Luftwiderstand zu zeichnen.

Bei dem ausgewählten Schlag ergibt sich für $t_u = \frac{25,84 \frac{m}{s}}{9,81 \frac{m}{s^2}} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{4,08 \frac{m}{s}}{25,84 \frac{m}{s}} \right) = 0,41s$.

Durch Einsetzen von t_u in die oben genannte Formel ergibt sich also die Bahnkurve mit Berücksichtigung des Luftwiderstands. Diese beschreibt die Flugbahn des Balls im Gegensatz zur Bahnkurve des schiefen Wurfes deutlich treffender und weicht nur leicht von der tatsächlichen Bahnkurve ab (siehe Anhang Seite 13). Der Luftwiderstand spielt

bei der Beschreibung der Flugbahn mithilfe einer Funktion für die Bahnkurve also eine entscheidende Rolle.

Analyse der Flugbahn eines Balls mit Spin

Bisher wurde nur die Flugbahn eines Balls analysiert, der ohne Spin geschlagen wird und sich somit gar nicht beziehungsweise möglichst wenig um die eigene Achse dreht. Da dies im tatsächlichen Spiel allerdings nur selten vorkommt, sollte man für eine genauere Bewegungsanalyse zusätzlich auch mit Spin geschlagene Bälle betrachten. Bei dem zu analysierenden Ball handelt es sich um einen Ball, der mit Topspin geschlagen wurde. Im Falle des Topspins rotiert der Ball mit einem Vorwärtsdrall um die eigene Achse. Bis auf diesen Unterschied der Rotation des Balles um die eigene Achse bleiben Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung so wie in dem oben beschriebenen Fall der Analyse eines Balls ohne Spin. Bei der Auswertung dieses Schlags ergibt sich für die reale Bahnkurve eine Ausgleichskurve, die durch die Funktion $y(x) = -0,054 \cdot x^2 + 0,43 \cdot x + 1,14$ (siehe Anhang Seite 17) beschrieben werden kann. Die Anfangsgeschwindigkeiten in horizontale und in vertikale Richtung lassen sich, genauso wie bei dem Schlag ohne Spin, durch die Ableitung der jeweiligen Zeit-Ort-Funktionen zum Zeitpunkt t_0 berechnen und ergeben in diesem Fall $v_{0,x} = 10,16 \frac{m}{s}$ und $v_{0,y} = 4,704 \frac{m}{s}$. Daraus ergeben sich analog zum vorherigen Versuch die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 11,1961 \frac{m}{s}$ sowie der Winkel $\alpha = 24,84^\circ$ und somit für den schiefen Wurf die

Funktion $y(x) = 1,14 \text{ m} + \tan(24,84^\circ) \cdot x - \frac{9,81 \frac{m}{s^2}}{2 \cdot \left(11,1961 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot \cos(24,84^\circ)} \cdot x^2$. Da diese

Funktion genauso wie im oberen Beispiel von der realen Bahnkurve des Balles abweicht, berücksichtigt man auch hier erneut den Luftwiderstand, um zu überprüfen, ob man die Bahnkurve mithilfe des Luftwiderstands treffender beschreiben kann. Dafür geht man analog zum Versuch mit dem Ball ohne Spin vor und berechnet zunächst t_u , was bei diesem Schlag einer Zeit von 0,47 Sekunden entspricht. Vergleicht man nun die tatsächliche Bahnkurve erneut mit der des schiefen Wurfes und der Bahnkurve, welche den Luftwiderstand berücksichtigt, fällt auf, dass die Funktion, die sich für den Luftwiderstand ergeben hat, zwar näher an der tatsächlichen Bahnkurve ist, aber die Flugbahn auch nicht ausreichend genau beschreibt.

Der Magnus-Effekt

Für eine noch präzisere Analyse von Ballbewegungen sollte neben dem Einfluss des Luftwiderstands ein weiterer Effekt betrachtet werden: der Magnus-Effekt, der nach

dem Physiker Heinrich Gustav Magnus (1802 – 1870) benannt worden ist. H. G. Magnus gelang erstmalig die Erklärung des Einflusses einer Rotationsbewegung eines Balls auf seine Bahnkurve.

Tennispielerinnen und Tennisplayer rufen diese Rotationen des Tennisballs gezielt hervor, wenn sie einen Topspin- oder einen Slice-Schlag ausführen. Dabei rotiert der Ball um die eigene horizontale Symmetrieachse entweder mit einem Vorwärtsdrall im Falle des Topspins oder mit einem Rückwärtsdrall im Falle des Slice.

Diese Rotation um die eigene Achse des Balls bewirkt, dass die oben erläuterten Luftwirbel oberhalb und unterhalb des Balls nicht mehr symmetrisch verlaufen. Hat der Ball einen Vorwärtsdrall, also den Topspin, so lösen sich die Luftwirbel oberhalb des Balls früher und unterhalb des Balls später ab mit dem Ergebnis, dass auf den Ball eine „Magnus-Kraft“ nach unten wirkt. Im umgekehrten Fall, also beim Rückwärtsdrall bzw. Slice, verhalten die Luftwirbel sich ebenfalls nicht mehr symmetrisch. Hier lösen sie sich oberhalb des Balls später und unterhalb des Balls früher ab. Die daraus resultierende Magnus-Kraft wirkt dann nach oben. Ein mit Topspin geschlagener Tennisball weist somit also eine in horizontaler Richtung verkürzte Bahnkurve auf. Ein mit Slice geschlagener Ball legt in horizontaler Richtung eine längere Strecke zurück als ein entsprechend ohne Spin gespielter Ball.

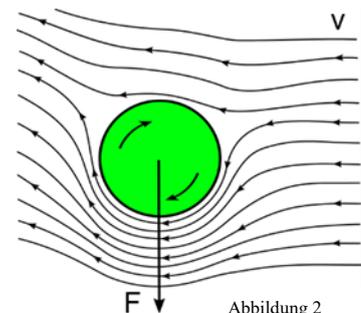
Für die Berechnung der Kraft durch den Magnus-Effekt gilt die folgende Formel:

$$F_M = \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot \omega \cdot v \quad [1, \text{S.225}]$$

ω : Winkelgeschwindigkeit des Balls; r : Radius des Balls

In der Literatur [4, S.60/61] gibt es noch eine weitere, etwas anschaulichere Erklärungsmöglichkeit, die im Wesentlichen auf den Mathematiker und Physiker Daniel Bernoulli (1700 – 1782) zurückgeht.

Auf einer Seite des Balls dreht sich der Ball mit der Strömung der Luft. Dort strömt die Luft schneller als auf der anderen Seite, wo die Drehung entgegen der Luftströmung verläuft und so den Luftstrom verlangsamt. Im Bild wird die Geschwindigkeit der Luftströmung veranschaulicht. Dort, wo die Stromlinien eng beieinander liegen, strömt die



Luft schneller. Nach Bernoulli entsteht dort, wo die Luft schneller strömt ein Unterdruck. In Abbildung 2 ist das an der Unterseite der Fall, sodass der Ball eine Kraft nach unten erfährt.

Es ist grundsätzlich davon auszugehen, dass die quantitative Berücksichtigung des Magnus-Effekts in der theoretischen Berechnung der Bahnkurve zu einem noch näher an der gefilmten Kurve liegenden Ergebnis führt.

Die tatsächliche Umsetzung ist aber im Rahmen dieser Facharbeit aus gleich mehreren Gründen nicht möglich. Einerseits lässt sich die Winkelgeschwindigkeit eines geschlagenen Tennisballs mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht bestimmen. Andererseits bewegt sich der Ball in der Realität nicht nur in horizontaler Richtung sondern gleichzeitig bis zum Umkehrpunkt nach oben und danach nach unten. Die Magnus-Kraft wirkt immer senkrecht zur Bahnkurve. Somit liefert die oben zitierte Formel zwar die Magnus-Kraft aber keine Möglichkeit einer direkten Einbeziehung in die kinematischen Formeln für die Bahnkurve.

Rückbezug zur Fragestellung

Mit Blick auf die Frage, wie physikalische Gesetzmäßigkeiten bei der Ausführung verschiedener Schlagtechniken im Tennis vorteilhaft genutzt werden können, lässt sich jetzt festhalten, dass Tennisspielerinnen und Tennisspieler die Bahnkurven der von ihnen in das gegnerische Feld geschlagenen Bälle durchaus bewusst und unter Nutzung physikalischer Gesetzmäßigkeiten beeinflussen können. Weit verbreitet sowohl im Spitzensport als auch im Breitensport ist der gezielte Einsatz von Topspinschlägen. Die durchgeführten Analysen erklären, warum mit Topspin geschlagene Bälle eine verkürzte Bahnkurve im Vergleich zu Bällen ohne Spin aufweisen. Somit können sich solche Bälle mit hoher Geschwindigkeit bewegen und dennoch innerhalb des Spielfeldes aufkommen. Sie eignen sich also insbesondere als Angriffsbälle.

Außerdem weisen sie ein besonderes Absprungsverhalten nach dem Auftreffen auf dem Boden auf. Aufgrund des Spins springen diese Bälle besonders hoch ab und stellen somit für die Gegnerin bzw. den Gegner eine besondere Anforderung an einen kontrollierten Rückschlag. Qualitativ lässt sich dieses Verhalten mit der Erhaltung der Rotation des Balls erklären.

Ein weiterer Schlag mit Spin im Tennis ist der Slice. Dieser konnte im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht quantitativ analysiert werden, da sich einerseits herausstellte, dass nur mit Slice („Unterschnitt“) gespielte Bälle mit einer sehr weiten Flugbahn bis

kurz vor die Grundlinie die gewünschten Effekte deutlich erkennen ließen. Eine Videographie der entsprechenden Bahnkurven war dann aber aufgrund der Größe des zu filmenden Bereichs mit den zur Verfügung stehenden Mitteln in einer Tennishalle leider nicht möglich.

Andererseits lässt sich der Slice auch nicht als ein veränderter schräger Wurf betrachten, da seine Flugbahn im Idealfall fast linear verläuft.

Den Slice setzt man als einen Schlag mit geringer Höhe der Bahnkurve, verlängerter Flugdauer und stark reduziertem Absprung nach dem Auftreffen auf den Boden ein, oftmals als ein Verteidigungsschlag in Bedrängnis oder auch zur Vorbereitung von Netzangriffen.

Fazit und Ausblick

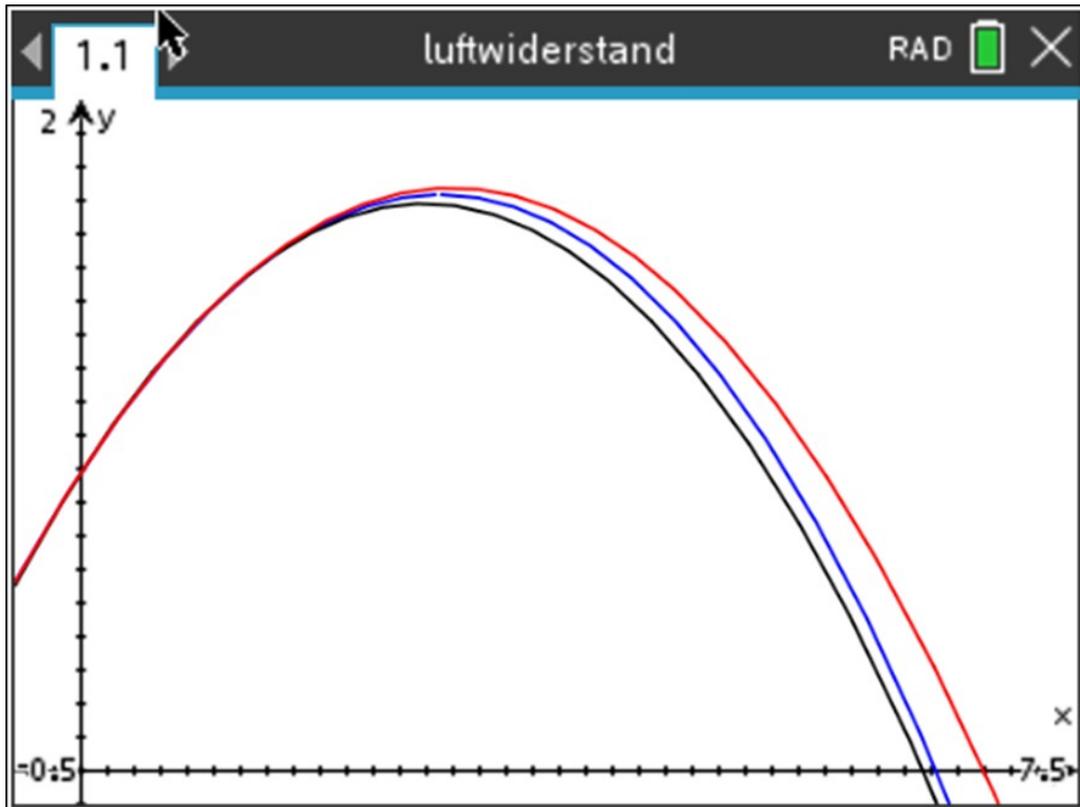
Im Rahmen der Bearbeitung des Themas der vorliegenden Facharbeit ist es gelungen, einen Schlag ohne Spin, den Drive, sowie den Topspinschlag im Tennis sehr genau zu analysieren und seine besonderen Eigenschaften mit physikalischen Gesetzmäßigkeiten zu erklären. Die Ergebnisse können die realen Bahnkurven treffend erklären.

Somit konnte die zentrale Fragestellung in weiten Teilen beantwortet werden, wie im vorhergehenden Abschnitt dargelegt wurde. Damit ist das zentrale Ziel dieser Arbeit erreicht worden.

Die Eigenschaften des Sliceschlags konnten nicht quantitativ untersucht, wohl aber qualitativ erklärt werden. Die weitergehende Analyse dieses Schlags stellt eine der zahlreichen Möglichkeiten dar, diese Arbeit noch zu erweitern.

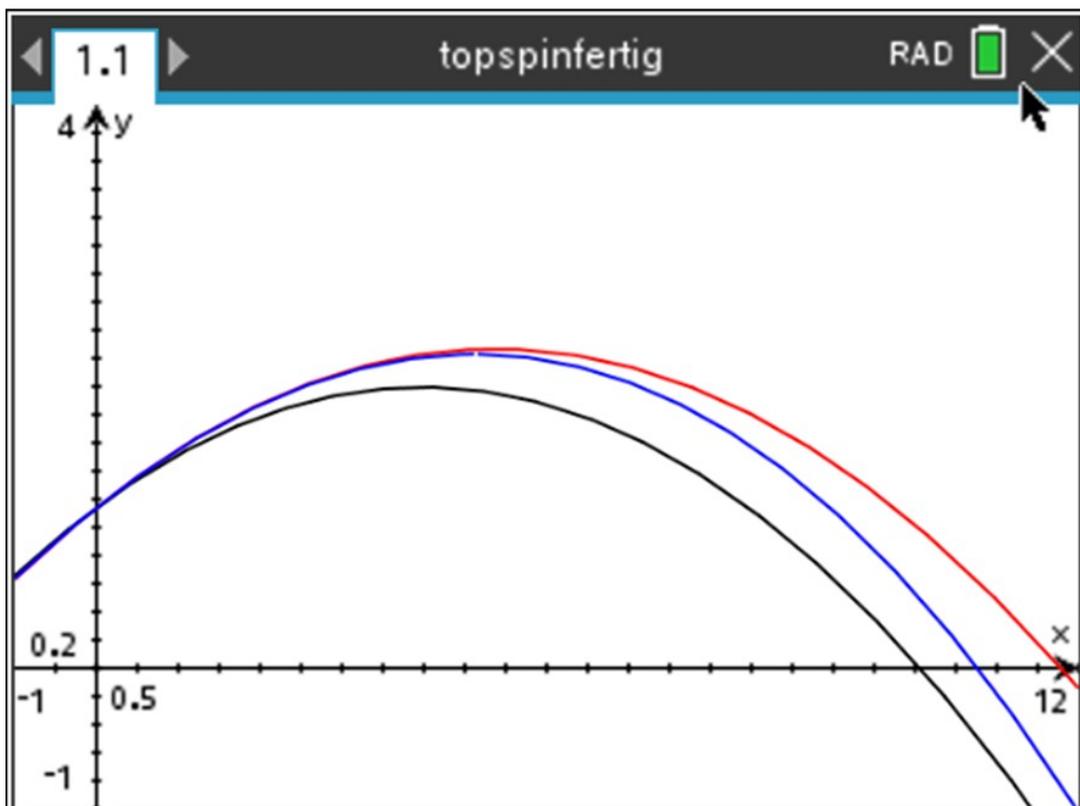
So ist es außerdem denkbar, den Einfluss der verschiedenen Bodenbeläge auf das Absprungsverhalten der Tennisbälle oder auch – im Bereich der Dynamik – die relevanten Kräfte, die Energieformen und –umwandlungen oder auch die Impulse in den Blick zu nehmen.

Anhang

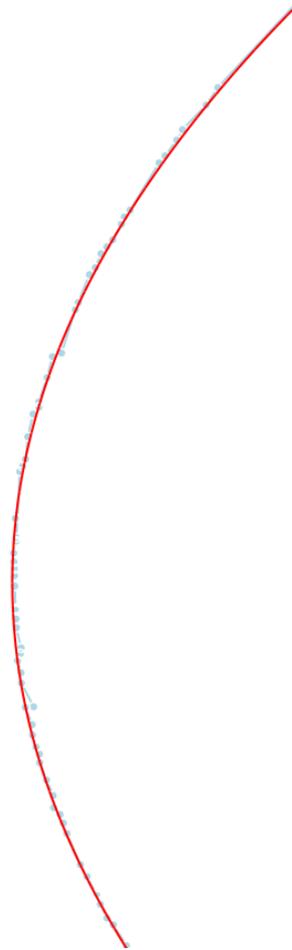


Die rote Bahnkurve entspricht jeweils dem schiefen Wurf, die blaue der Berücksichtigung des Luftwiderstands und die schwarze der realen Bahnkurve.

Graphen ohne Spin:

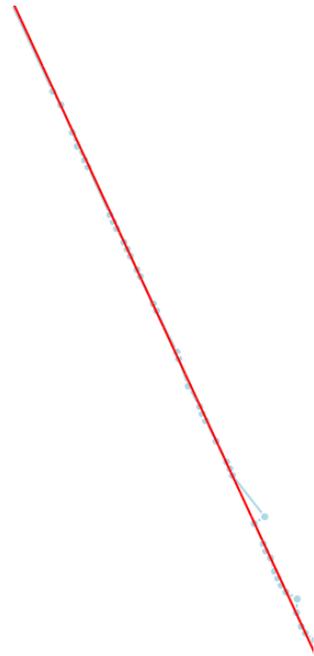


Bahnkurve

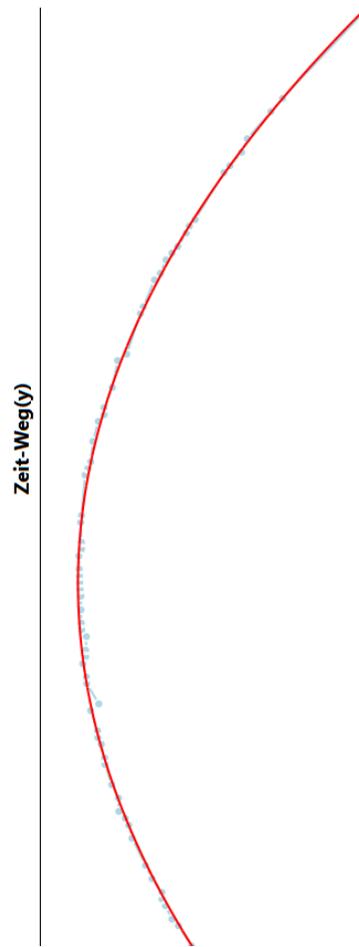


$$\begin{aligned}y(x) &= -0,12x^2 \\ &+ 0,62 \cdot x \\ &+ 0,89\end{aligned}$$

Zeit-Weg(x)

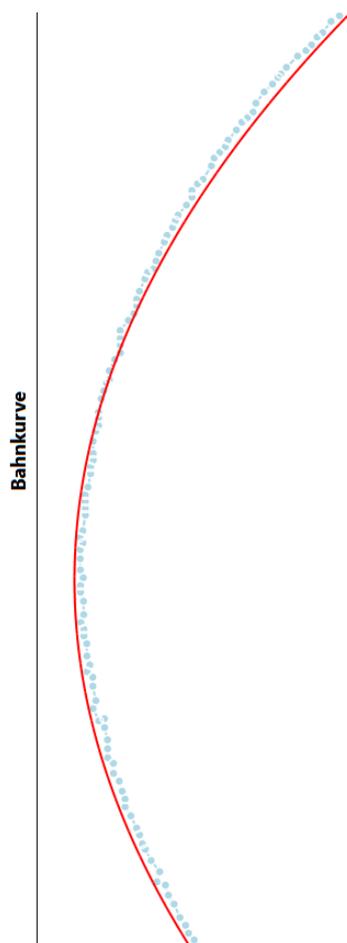


$$\begin{aligned}x(t) &= 0,84 \cdot t \\ &- 11,68\end{aligned}$$



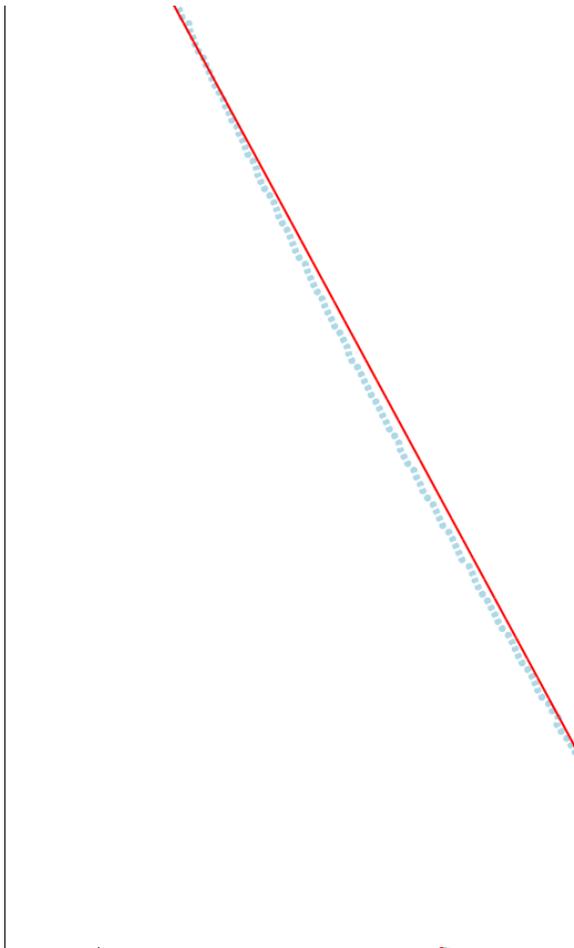
$$\begin{aligned} y(t) &= 0,08 \cdot t^2 \\ &+ 2,82 \cdot t \\ &- 22,43 \end{aligned}$$

Graphen mit Topspin:



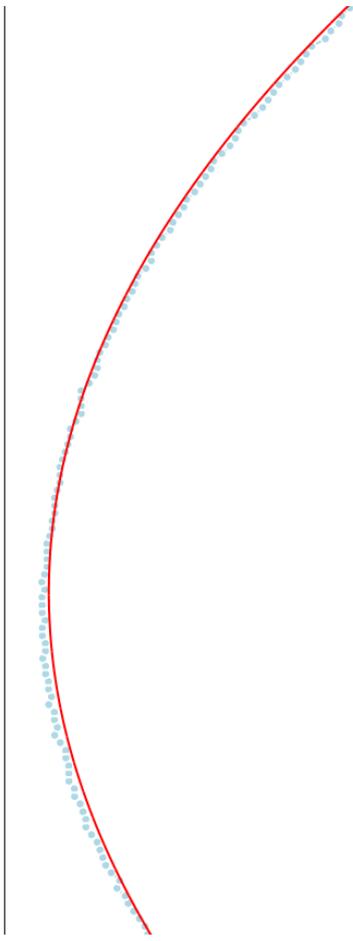
$$\begin{aligned} y(x) &= -0,054x^2 \\ &+ 0,43 \cdot x \\ &+ 1,14 \end{aligned}$$

Zeit-Weg(x)



$$\begin{aligned}x(t) &= 1,27 \cdot t \\ &\quad - 327,5\end{aligned}$$

Zeit-Weg(y)



$$\begin{aligned}y(t) &= -0,082 \\ &\quad \cdot t^2 \\ &\quad + 43,08 \\ &\quad \cdot t \\ &\quad - 5640,0\end{aligned}$$

Physikunterricht und Tennis

Benedikt Egidy, Thomas Wilhelm

1. Motivation

Das Interesse von Schülern am Physikunterricht nimmt im Laufe der Schuljahre ab und die Schüler sehen wenig Zusammenhang zwischen Alltag und Physikunterricht. Eine Möglichkeit, um im Unterricht interessante, alltagsnahe Themenbezüge herzustellen, sind Bezüge zum Sport. So kann auch Tennis, eine der deutschlandweit gefragtesten Sportarten, dazu genutzt werden, um Physik zu behandeln. Mit Hilfe der Videoanalyse von Bewegungen und mit Hilfe von computerbasierter Messwerterfassung können Inhalte des Mechanikunterrichts der Oberstufe anhand von Tennis angewandt und vertieft werden [1].

2. Kräfte bei Zusammenstößen

Trifft ein Tennisball auf den Boden, so übt er auf den Boden eine Kraft aus. Gemäß dem Wechselwirkungsprinzip übt der Boden ebenso eine gleichgroße Kraft auf den Ball aus. Solche kurzen Stöße werden mit dem

$$\text{Kraftstoß} := \int_{t_A}^{t_E} \vec{F} dt \quad \{1\}$$

beschrieben [2]. Mit dem zweiten Newton'schen Axiom gilt (da die Masse m konstant ist):

$$\int_{t_A}^{t_E} \vec{F} dt = m \cdot (\vec{v}_E - \vec{v}_A) \quad \{2\}$$

Schon in der Sekundarstufe I kann dies in elementarisierter Form mit der mittleren Kraft verwendet werden:

$$\vec{F}_{\text{Mittel}} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v} \quad \{3\}$$

Diese Gleichung kann die zentrale Gleichung im Mechanikunterricht der Sekundarstufe I sein [3].

2.1 Kraft beim Stoß des Tennisballs mit dem Boden (Kraftmessplatte)

Ein Kraftstoß findet z.B. dann statt, wenn der Tennisball mit dem Boden stößt. Ist der Boden eine Kraftmessplatte, kann der Kraftverlauf gemessen werden. Im Versuch kann ein Tennisball senkrecht fallengelassen oder bei Verwendung einer zweiachsigen Kraftmessplatte (Aufnahme von Normal- und Querkraft) schräg auf die Kraftmessplatte geworfen bzw. auf die Kraftmessplatte aufgeschlagen werden. Der Kraftverlauf beim Aufprall eines

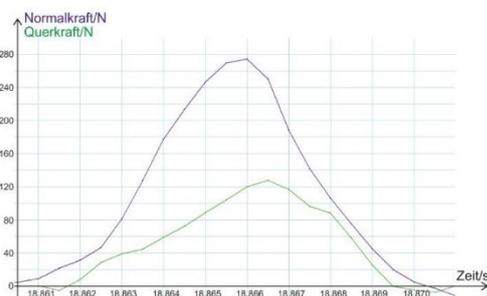


Abb. 1: Zeitlicher Verlauf der Normal- und Querkraft eines auf die Kraftmessplatte aufgeschlagenen Balles

Tennisballe auf eine Kraftmessplatte (Firma Pasco) nach einem regelkonformen Tennisauflschlag wurde mit dem Programm DataStudio aufgenommen (siehe Abb. 1) und analysiert. Es ergaben sich die Mittelwerte $\bar{F}_{normal} = 129 \text{ N}$ und $\bar{F}_{quer} = 67 \text{ N}$ sowie die Maximalwerte $F_{normal} = 275 \text{ N}$ und $F_{quer} = 128 \text{ N}$ sowie die Kontaktzeit $\Delta t \approx 8 \text{ ms}$. Mit Hilfe der bekannten Tennisballmasse $m = 0,057 \text{ kg}$ [4] und dem zweiten Newton'schen Axiom in der Form

$$a = F/m \quad \{4\}$$

ergeben sich die Mittelwerte $\bar{a}_{normal} = 2,3 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2$ und $\bar{a}_{quer} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2$ sowie die Maximalwerte $a_{normal} = 4,8 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2$ und $a_{quer} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2$.

Bei dieser Kraftbestimmung mittels der Kraftmessplatte gibt es das Problem, dass die Kraftmessplatte bereits während des Kontaktes von Tennisball und Kraftmessplatte mitzuschwingen beginnt. Dieses Mitschwingen führt zu einem unsymmetrischen, nicht-realen Kraftverlauf. Bei schwachen Kraftstößen, d.h. bei niedrigen Geschwindigkeitsbeträgen tritt dieser Effekt besonders in Erscheinung und verfälscht die Ergebnisse. Bei starken Kraftstößen, d.h. bei höheren Geschwindigkeitsbeträgen, spielt das Mitschwingen der Kraftmessplatte eine eher untergeordnete Rolle, in solchen Fällen kann demnach der Kraftverlauf sehr gut mittels der Kraftmessplatte bestimmt werden [1].

2.2 Kraft beim Stoß des Tennisballs mit dem Boden (Videoanalyse)

Beim Stoß zwischen Tennisball und Boden kann auch der Ball mit einer Hochgeschwindigkeitskamera gefilmt und mit einem Videoanalyseprogramm analysiert werden. Die Ermittlung der auftretenden Kraft kann dabei auf dreierlei Weisen geschehen: 1. direkt über die Bestimmung der Geschwindigkeiten kurz vor und kurz nach dem Prellen sowie der Bestimmung der Kontaktzeit, 2. indirekt über das Kompressibilitätsverhalten des Tennisballes und 3. durch energetische Überlegungen.

Im Versuch wurde ein Tennisball aus ca. 1,0 m Höhe senkrecht auf den Boden fallengelassen. Mit Hilfe des Videoanalyseprogramms measure dynamics ließen sich die Geschwindigkeiten kurz vor und kurz nach dem Aufprall des Tennisballes bestimmen:

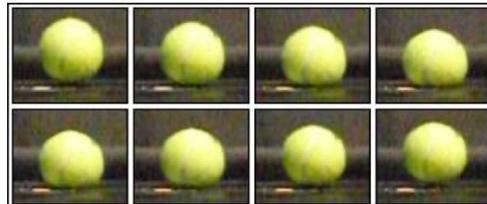


Abb. 2: Serienbild eines prellenden Tennisballes

$v_{vorher} = -4,5 \text{ m/s}$ und $v_{nachher} =$

$3,3 \text{ m/s}$. Betrachtet man den Aufprall des Tennisballes in der Einzelbildfunktion (Zeit zwischen zwei Bildern: 1 ms), so lässt sich hieraus die Kontaktzeit des Tennisballes mit dem Boden, hier $\Delta t = 0,006 \text{ s}$, bestimmen (siehe Abb. 2).

Hieraus ergeben sich mit der bekannten Tennisballmasse $m = 57 \text{ g}$ und den Gleichungen {3} und {4} die Mittelwerte:

$$\bar{F} = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = \frac{m \cdot (v_{nachher} - v_{vorher})}{\Delta t} = 75 \text{ N},$$

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m} = 1,3 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Zur Kraftbestimmung über die Kompressionseigenschaft des Tennisballes ist zunächst der Zusammenhang von Kraft und Abplattungsdurchmesser zu ermitteln. Hierfür wird der Tennisball in eine Presse gelegt (siehe Abb. 3), mit Gewichten belastet und die jeweils aus den einzelnen Gewichten resultierende Höhe des Tennisballes bestimmt. Sodann wird die auf dem Tennisball wirkende Gewichtskraft gegen die Abplattungsstrecke des Tennisballes aufgetragen (siehe Abb. 4). Die Messwerte verhalten sich annähernd linear, es kann also die Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes angenommen werden [2, 5].

Im Versuch selbst wird der Tennisball mit moderatem Tempo (hier $|v_{vorher}| = 7,3 \text{ m/s}$) senkrecht auf den Boden geworfen und der Aufprall des Tennisballes auf den Boden mit einer Hochgeschwindigkeitskamera aufgenommen. Mit einem Videoanalyseprogramm lässt sich die minimale Tennisballhöhe während des Kontaktes des Tennisballes mit dem Boden bestimmen (siehe Abb. 5) (Tennisballdurchmesser $\varnothing = 0,066 \text{ m}$ [4], $s_{max} = 0,013 \text{ m}$). Die maximal auftretende Kraft zwischen Tennisball und Boden lässt sich dann mit Hilfe von Abbildung 4 zu $F_{max} \approx 120 \text{ N}$ bestimmen.

Diese Bestimmungsmethode der Kraft hat den Vorteil, dass die Kraft schnell,

einfach und einsichtig bestimmt werden kann, allerdings hat sie auch drei entscheidende

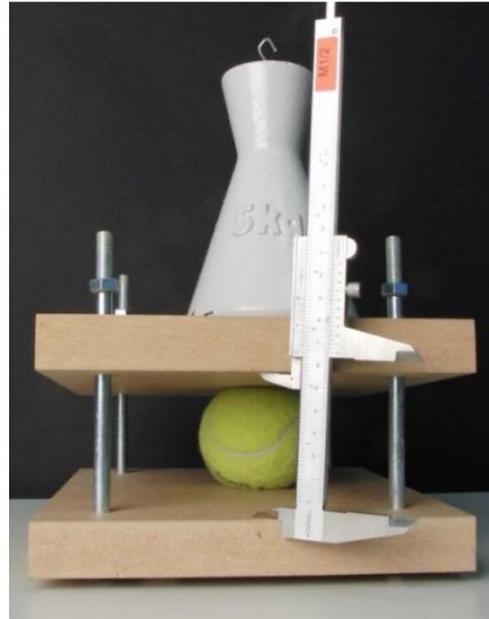


Abb. 3: Tennisball in Presse

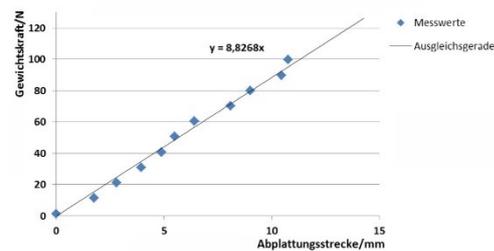


Abb. 4: Abhängigkeit der Abplattungsstrecke von der auf ihr lastenden Gewichtskraft



Abb. 5: Messung der Höhe des auftreffenden Tennisballes

Nachteile. Die Ermittlung des Zusammenhangs in Abbildung 4 leidet an den niedrigen Referenzgewichten. Außerdem entspricht diese Messung nicht exakt den Bedingungen eines prellenden Tennisballes. Die Belastung erfolgt nämlich in der Tennisballpresse von zwei Seiten (Boden von unten und Gewicht von oben); in der Realität wird der Tennisball nur von einer Seite, nämlich dem Prellboden, belastet. Des Weiteren erfolgt die Belastung in der Tennisballpresse langsam und statisch, während der Tennisball eigentlich stoßartig und dynamisch belastet wird.

Die Maximalkraft zwischen Tennisball und Boden lässt sich weiterhin auch energetisch bestimmen [6], wenn in der Videoanalyse des senkrecht auf den Boden geworfenen Balles die Geschwindigkeiten kurz vor und kurz nach dem Aufprall bestimmt werden (im letzten Versuch: $v_{vorher} = -7,3$ m/s, $v_{nachher} = 4,4$ m/s). Kurz vor dem Bodenkontakt gilt:

$$E_{gesamt}(vorher) = E_{kin,vorher} = \frac{1}{2}mv_{vorher}^2.$$

Kurz nach dem Bodenkontakt gilt:

$$E_{gesamt}(nachher) = E_{kin,nachher} = \frac{1}{2}mv_{nachher}^2.$$

Unter Annahme der Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes gilt für den Augenblick der maximalen Verformung:

$$E_{gesamt}(bei\ maximaler\ Stauchung) = E_{spann}(s_{max}) = \frac{1}{2}Ds_{max}^2 = \frac{1}{2}F_{max} \cdot s_{max}.$$

Ohne Energieverlust wären die Werte zu den drei Zeiten identisch. Da aber während dem Stoß Energie verloren geht, bestimmt man den Mittelwert $\overline{E_{kin}}$ dieser beiden kinetischen Energien vor und nach dem Stoß und erhält über $E(s_{max}) = \overline{E_{kin}}$ eine Abschätzung für die maximal auftretende Kraft zwischen Tennisball und Boden:

$$F_{max} = \frac{2}{s_{max}} \cdot \overline{E_{kin}} = 160 \text{ N}.$$

Schätzt man die mittlere Kraft auf ca. 100 N, lässt sich nun zusätzlich über die Newton'sche Bewegungsgleichung {3} die Kontaktzeit Δt abschätzen. Sie beträgt hier ca. 7 ms. Der Fehler bei der energetischen Methode resultiert überwiegend aus Kameraeigenschaften, nämlich aus der geringen Auflösung des Videos sowie aus der begrenzten Anzahl an Bildern pro Sekunde, was zu einer ungenauen Bestimmung des maximalen Tempos führt [1].

2.3 Kraft beim Stoß des Tennisball mit dem Tennisschläger (elektrisch)

Interessant ist auch die Kraft beim Stoß von Tennisball mit Tennisschläger [7]. Hierfür wird ein Tennisball mit einem Tennisschläger unter einer möglichst horizontalen Flugbahn an die Wand bzw. Tür geschlagen. Tennisball, Tennisschläger und Wand bzw. Tür werden vorher mit elektrisch leitenden Materialien präpariert. Hier

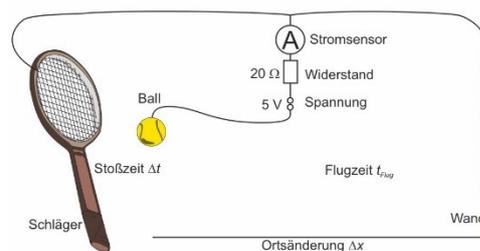


Abb. 6: Schaltbild für den Versuch zum Stoß Ball-Schläger

wurde der Tennisball in haushaltsübliche Aluminiumfolie gewickelt, auf die Tür wurde ein ca. 1 m² großes Aluminiumfolienstück geklebt und der Tennisschläger mit Stahlsaite besaitet. Alles wird so an einen Stromsensor angeschlossen, dass die Zeiten der Kontakte des Tennisballes mit dem Tennisschläger und mit der Wand aufgenommen werden können (siehe Abb. 6). Als Stromsensor eignen sich computerbasierte Messwerterfassungssysteme. Hier wurde der Spannungs-/Stromsensor der Lehrmittelfirma Pasco verwendet, die aufgenommenen Daten wurden mit DataStudio ausgewertet.

Aus dem aufgenommenen zeitlichen Verlauf (siehe Abb. 7) kann die Stoßzeit des Tennisballes mit dem Tennisschläger (Zeitdauer des ersten Peaks) sowie die Flugzeit, die der Tennisball vom Verlassen des Tennisschlägers bis zur Berührung der Wand bzw. Tür benötigt (Zeitdifferenz zwischen den Peaks), bestimmt werden. Aus Abbildung 7 ergibt sich $\Delta t_{\text{Stoß}} = 0,007 \text{ s}$ und $t_{\text{Flug}} = t_2 - t_1 = 0,326 \text{ s}$.



Abb. 7: Zeitlicher Verlauf des Stromflusses

Ist die Flugstrecke des Balles bekannt ($\Delta x = 3,9 \text{ m}$), können mit den Gleichungen {3} und {4} die mittlere Kraft \bar{F} und die mittlere Beschleunigung \bar{a} bestimmt werden [7] und es ergibt sich:

$$v_{\text{Flug}} = \frac{\Delta x}{t_{\text{Flug}}} = 12 \text{ m/s} ,$$

$$\bar{F} = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t_{\text{Stoß}}} = 100 \text{ N} \text{ und}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t_{\text{Stoß}}} = 2 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2 .$$

Der Versuch selbst ist relativ unanfällig für Fehler. Das größte Problem ist die begrenzte Abtastrate des Stromsensors (hier 1.000 Hz), so dass sich für die Stoßzeit eine Ungenauigkeit von mindestens 1 ms ergibt. Eine zweite Ungenauigkeit ergibt sich durch ein nicht exakt horizontales Fliegen des Tennisballes, was aufgrund der Erdanziehungskraft nicht komplett gelingen kann.

3. Kräfte während des Tennisballflugs

Der Flug eines Tennisballes durch die Luft ist als schräger Wurf ein Standardthema des Physikunterrichts. Während diesem Flug wirken drei Kräfte auf den Ball ein: die Erdanziehungskraft, die Luftreibungskraft und - sofern sich der Ball um eine Achse ungleich der Bewegungsrichtung dreht - die Kraft durch den Magnus-Effekt. Die Erdanziehungskraft zeigt dabei immer senkrecht zum Boden.

Bewegt sich ein Tennisball durch die Luft, so löst sich die Luft beim Umströmen von der Oberfläche des Tennisballs ab und es entstehen Wirbel [8+9]. Die Bewegung dieser Luftwirbel benötigt Energie, die aus der kinetischen Energie des Tennisballes genommen wird,

wodurch dieser verlangsamt wird. Die Richtung der Luftwiderstandskraft ist dabei immer entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung des Tennisballes, ändert sich also ständig. Beschrieben werden kann der Betrag der Luftwiderstandskraft F_L durch die Newton'sche Widerstandsformel. Nach dieser gilt:

$$F_L = \frac{1}{2} c_W \rho A v^2,$$

wobei ρ die Dichte der Luft, A die Querschnittsfläche des Tennisballs, c_W der Luftwiderstandswert des Tennisballs und v der Betrag der Geschwindigkeit (= Tempo) ist [10].

Als Magnus-Kraft wird die Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung (siehe Abb. 8 und 9) bezeichnet, die verantwortlich für die Bahnabweichung von Objekten ist, die um eine Achse senkrecht zur Bewegungsrichtung rotieren. Durch die Drehbewegung des Tennisballes verschiebt sich der Ort des Ablösens der laminaren Strömung unsymmetrisch mit der Balldrehung [8+9]. Auf der einen Seite, auf der sich der Ball mit der Luftströmung bewegt, reißt der rotierende Ball Luftteilchen mit; dadurch wird die Grenzschicht später vom Ball abgelöst. Auf der anderen Seite des Balles geschieht das Gegenteil; der rotierende Ball bewegt sich gegen die Luftströmung, wodurch sich die Luftteilchen früher vom Ball ablösen. Der sich drehende Ball hinterlässt damit insgesamt eine asymmetrische Wirbelschlepe und auch die Luft außerhalb der Wirbelschlepe wird vom Ball seitlich abgelenkt. Gemäß dem 3. Newton'schen Axiom erfährt der Ball als Reactio eine ablenkende Kraft in die Gegenrichtung [8+9]. So entsteht eine Kraft quer zur Bewegungsrichtung.



Abb. 8: Kräfte, die auf einen mit Vorwärtsdrall (Topspin) geschlagenen Tennisball wirken

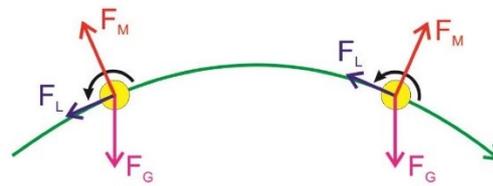


Abb. 9: Kräfte, die auf einen mit Rückwärtsdrall (Slice) geschlagenen Tennisball wirken

Hat ein Tennisball Vorwärtsdrall (Topspin) (siehe Abb. 8), so landet er früher als ohne den Drall auf dem Boden. Hat der Ball Rückwärtsdrall (Slice) (siehe Abb. 9), so landet er später auf dem Boden.

Auch heute ist es noch schwer, den Magnus-Effekt quantitativ zu beschreiben, es gibt viele verschiedene Formeln dafür. Der Magnus-Effekt bei Bällen wird in einem Modell von *S. I. Rubinow* und *Joseph B. Keller* gut beschrieben durch:

$$F_M = \rho A R \omega v \quad \{5\},$$

wobei A die Querschnittsfläche, ρ die Luftdichte und v der Geschwindigkeitsbetrag sowie R der Radius des Balles und ω seine Winkelgeschwindigkeit ist [11].

3.1 Magnus-Effekt beim Tennis

Um den Magnus-Effekt bei einem Tennisball zu zeigen, eignet sich ein Versuch mit einem rotierenden und schwingenden Tennisball. Der Tennisball wird mit Hilfe einer dünnen Schnur (z.B. Nähgarn) an ein Stativ befestigt (siehe Abb. 10). Für eine umfangreiche Versuchsauswertung empfiehlt es sich, eine Videoaufnahme von oben sowie eine Videoaufnahme von

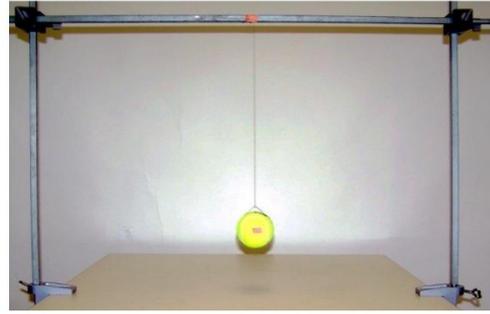


Abb. 10: Versuchsaufbau zum Zeigen des Magnuseffekts

der Seite zu machen, wobei für Letzteres eine Hochgeschwindigkeitskamera benötigt wird. Dazu wird auf den Tennisball wie in Abbildung 10 seitlich eine farbliche Markierung geklebt. Im ersten Schritt der Versuchsdurchführung wird der Tennisball ausgelenkt und losgelassen. Man kann beobachten, dass der Tennisball geradlinig vor und zurück schwingt; die Schwingungsebene bleibt immer gleich.

Anschließend wird der Tennisball möglichst stark um seine vertikale Achse angedreht und im sich drehenden Zustand ausgelenkt, z.B. über ein schnelles Auslenken des Garns. Der Tennisball schwingt nun nicht mehr geradlinig vor und zurück, sondern in Kurven (siehe Abb. 11); die Schwingungsebene dreht sich entsprechend der Bananenflanke beim Fußball. Die Richtung der Kurve ist dabei abhängig von der Drehrichtung des Tennisballes.

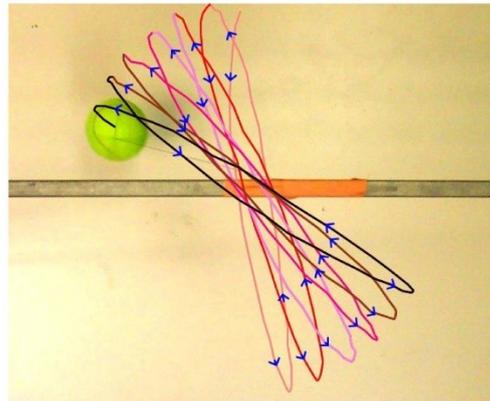


Abb. 11: Bahnkurve des schwingenden, angedrehten Tennisballes aus measure dynamics (Aufnahme von oben)

Wurde der Versuch auch von der Seite per Video aufgenommen, so lassen sich

die Ball- und Winkelgeschwindigkeit bestimmen. In diesem Versuch ergaben sich $\omega = 77,6 \text{ s}^{-1}$ und ein Durchschnittstempo von $\bar{v} = 0,47 \text{ m/s}$. Außerdem kann man mit Hilfe der Luftdichte ρ (ca. $1,2 \text{ kg/m}^3$) sowie mit dem bekannten Tennisballradius $R = 0,033 \text{ m}$ [4] mit Hilfe von Gleichung {5} die Magnus-Kraft bestimmen. In diesem Versuch ergab sich als mittlere Magnus-Kraft $\overline{F_M} = 4,9 \text{ mN}$. Mit einer Ballmasse von $m = 0,057 \text{ kg}$ [4] ergibt sich für die mittlere Querbeschleunigung $\overline{a_M}$ des Tennisballes aufgrund des Magnus-Effekts $\overline{a_M} = \overline{F_M} / m = 0,087 \text{ m/s}^2$.

Bei einem realen Tennisschlag eines Profis kann die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 310 \text{ s}^{-1}$ betragen und es kann ein Balltempo von $v = 25 \text{ m/s}$ angenommen werden [10]. So ergibt sich mit obiger Tennisballmasse und -radius $F_M = 1,1 \text{ N}$ und $a_M = 19 \text{ m/s}^2$. Die Werte lie-

gen also im Größenbereich der Gravitationskraft für einen Tennisball ($F_{Gravitation} = 0,56 \text{ N}$ und $a = 9,81 \text{ m/s}^2$), weshalb davon ausgegangen werden kann, dass der Magnus-Effekt die Bahnkurve eines Tennisballes maßgeblich beeinflusst.

3.2 Die Bahnkurve eines Tennisballs

Mit diesem Wissen kann die Bahnkurve eines Tennisgrundschlags untersucht werden. Dabei wird der Tennisball einmal möglichst ohne Spin geschlagen, so dass nur die Gravitations- und die Luftreibungskraft wirken, und einmal mit möglichst viel Spin, so dass die Gravitations-, die Luftreibungs- und die Magnus-Kraft wirken. Senkrecht zur Flugbahn des Tennisballs wird der Versuch mit einer Videokamera aufgenommen.

Interessant ist hierbei zu ermitteln, wie gut die tatsächliche Bahnkurve des Tennisballs mit der theoretischen Bahnkurve des idealen schiefen Wurfs (keine Berücksichtigung der Luftreibungs- und Magnus-Kraft) übereinstimmt. Mit Hilfe eines Videoanalyseprogramms, hier measure dynamics, lassen sich der Abschlagwinkel φ und die Anfangsgeschwindigkeitskomponente in Flugrichtung $v_{0,x}$ bestimmen. Hieraus lässt sich nun $v_{0,y}$ mit der Tangensfunktion ermitteln (die direkte Bestimmung von $v_{0,y}$ ist wegen der sich aufgrund der Gravitationskraft stark ändernden Geschwindigkeit schwieriger). Sodann kann man gemäß

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{0,x}^2} x^2 + \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}} x + h_0$$

die theoretische Bahnkurve des schiefen Wurfes in das Diagramm der tatsächlichen Bahnkurve eintragen (siehe rote Bahnen in Abb. 12 und 13) und prüfen, wie weit der reale Verlauf den theoretisch zu erwartenden Verlauf entspricht. Auch ohne Spin ist die reale Flugweite aufgrund der Luftreibungskraft kleiner als im Idealfall (16,4 m statt 22,7 m) (siehe Abb. 12). Bei einem mit Topspin geschlagenen Tennisball ist die Flugweite nochmal deutlich reduzierter (Flugweite 17 m statt 26,5 m) (siehe Abb. 13). Der Tennisspieler kann so auch einen schnellen Ball noch dazu bringen, innerhalb des Spielfeldes aufzukommen.

Für Schüler ist es visuell ansprechender, die Bahnkurve des Tennisballs mit Ortsmarken in das Video (siehe Abb. 14) einzuzeichnen. Außerdem ist



Abb. 12: Ideale Bahnkurve (rot, Berechnung ohne Luftreibung und ohne Magnus-Effekt) und reale Bahnkurve (blau, Messwerte der Videoanalyse) eines Tennisballflugs ohne Spin

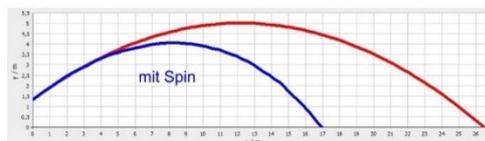


Abb. 13: Ideale Bahnkurve (rot, Berechnung ohne Luftreibung und ohne Magnus-Effekt) und reale Bahnkurve (blau, Messwerte der Videoanalyse) eines Tennisballflugs mit Spin

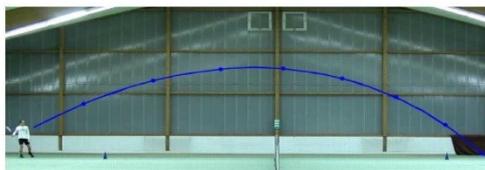


Abb. 14: Bahnkurve und Ortsmarken im Video

es sinnvoll, die Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung, die Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung sowie die resultierende Geschwindigkeit ebenfalls in das Video einzzeichnen (siehe Abb. 15). Im Gegensatz zu einer Flugbahn ohne Luftreibung und Magnus-Effekt sieht man hierbei, wie die Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung immer kleiner wird.

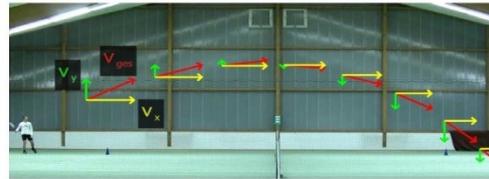


Abb. 15: Einstempeln der Geschwindigkeitskomponenten in das Video

4. Energie beim springenden Tennisball

Energieumwandlungen und Energieerhaltung sind Standardthemen im Physikunterricht. Häufig wird ein fallender und wieder hoch springender Ball betrachtet, wobei jeder weiß, dass der Ball nicht mehr die Ausgangshöhe erreicht. Dieser Ablauf kann auch mit einem Tennisball behandelt werden. Dazu wird das Springen eines senkrecht fallengelassenen Tennisballes aus einer Anfangshöhe h_1 mittels einer Hochgeschwindigkeitskamera aufgezeichnet (hier 210 fps eingestellt, jeder 3. Frame verwendet, entspricht 70 fps) und mit einem Videoanalyseprogramm analysiert.

Die gegenseitige Umwandlung von Höhenenergie und kinetischer Energie kann mit Hilfe des Videoanalyseprogramms measure dynamics nicht nur als Diagramm, sondern auch mit Hilfe von Säulen im Video visualisiert werden [12]. Aus Abbildung 16 und 17 ist zu erkennen, dass zu Beginn die mechanische Energie ausschließlich in Form von Höhenenergie vorhanden ist. Die Höhenenergie wird im Verlaufe der Bewegung zunächst kontinuierlich in kinetische Energie umgewandelt.

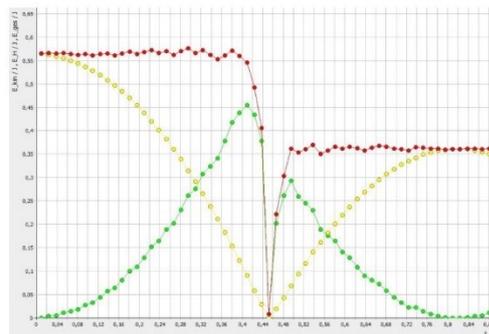


Abb. 16: Darstellung der Umwandlung der mechanischen Energien: Höhenenergie, kinetische Energie und die Summe beider Energien

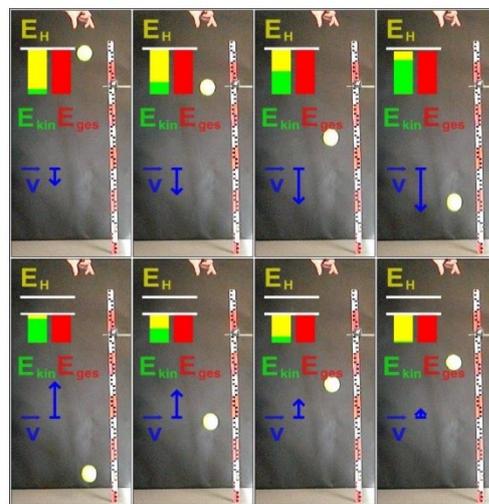


Abb. 17: Serienbild des Versuchsablaufs unter Einblendung dynamisch ikonischer Repräsentationen

Die Gesamtenergie, bestehend aus kinetischer und Höhenenergie, bleibt dabei jedoch konstant, lediglich wegen der etwas ungenauen Bestimmung der Geschwindigkeit ergibt sich ein leichtes Wackeln des Graphen. Kurz vor dem Auftreffen des Balles auf den Boden ist die Höhenenergie vollständig in kinetische Energie umgewandelt worden; die kinetische Energie und das Tempo des Balles erreichen ein Maximum. Wenn der Ball den Boden berührt, wird die kinetische Energie überwiegend in Spannenergie umgewandelt. Die Summe aus nur kinetischer Energie und Höhenenergie muss daher für einen kurzen Zeitpunkt auf 0 J abfallen, da zu diesem Zeitpunkt weder kinetische noch Höhenenergie vorliegen. Werden anders als bei Abbildung 16 zu wenig Bilder pro Sekunde analysiert, kann dies nicht abgebildet werden. Beim Pellen des Balles wird jedoch auch ein Teil der kinetischen Energie in andere Energieformen, wie zum Beispiel in innere Energie, umgewandelt, was mit Hilfe einer Wärmebildkamera sichtbar gemacht werden kann.

Anschließend wird die kurz vorher entstandene Spannenergie wieder in kinetische Energie zurückgewandelt, weshalb der Ball stark beschleunigt wird und den Boden mit maximalem Tempo, das nun jedoch aufgrund der mechanischen Energieverluste geringer ist als vor dem Pellen, verlässt. Anschließend steigt der Ball wieder und wird langsamer; kinetische Energie wird in Höhenenergie umgewandelt. Jedoch wird aufgrund des geringeren Starttempos nicht mehr die ursprüngliche Höhe erreicht.

Wie stark die Verluste beim Pellen sind, kann mit Hilfe des Elastizitätskoeffizienten beschrieben werden [13]. Er berechnet sich gemäß folgender Beziehung [2]:

$$e = \frac{|v_2|}{|v_1|} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad \{6\}.$$

Mit Hilfe des Videoanalyseprogramms measure dynamics werden die Anfangshöhe h_1 und die maximale Höhe h_2 nach dem ersten Pellen des Balles auf den Boden (siehe Abb. 18) sowie die Geschwindigkeit v_1 kurz vor und die Geschwindigkeit v_2 kurz nach dem ersten Pellen des Balles auf den Boden (siehe Abb. 19) bestimmt und hieraus der Elastizitätskoeffizient e berechnet. Für eine Fallhöhe von ca. 1,0 m ergibt sich mit Gleichung {6} und den Werten aus Abbildung 18

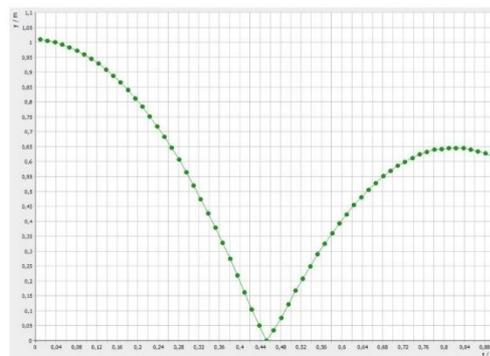


Abb. 18: Ballhöhe in Abhängigkeit der Zeit

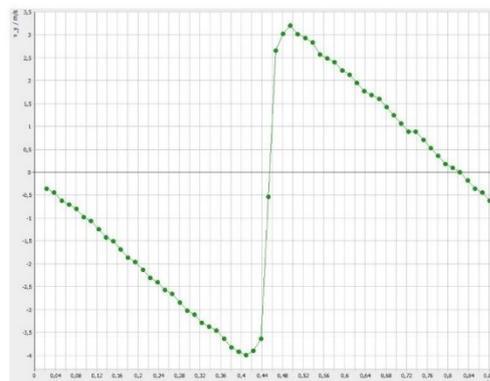


Abb. 19: y-Geschwindigkeitskomponente über der Zeit

bzw. 19:

$$e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{0,645 \text{ m}}{1,01 \text{ m}}} = 0,799 \quad \text{bzw.}$$

$$e = \frac{|v_2|}{|v_1|} = \frac{3,21 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3,99 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,803 .$$

Die Ergebnisse aus beiden Bestimmungsmethoden des Elastizitätskoeffizienten (über Höhen- und über Geschwindigkeitsmessung) liegen im gleichen Bereich. Der Vorteil in der Bestimmung über die Geschwindigkeitsmessung liegt in der höheren Anschaulichkeit für die Schüler, allerdings sind die Ergebnisse im Vergleich zur Bestimmung über die Höhenmessung viel ungenauer. Aufgrund der begrenzten Kameraqualität (bestimmt durch die Bildrate und die Auflösung) ergibt sich bei den hier auftretenden Geschwindigkeiten ein Fehler von bis zu 10 %, im Gegensatz zu einem Fehler von ca. 1 % bei der Höhenmessung [1].

Um den Elastizitätskoeffizienten verschiedener Tennisbälle miteinander vergleichen zu können, wurde deren Elastizitätskoeffizient aufgrund der höheren Genauigkeit über die Höhenmessung bestimmt. Zur Bestimmung wurden ein fabrikneuer Tennisball ohne Druck (ein sog. druckloser Ball), ein fabrikneuer Tennisball mit Druck (ein sog. Druckball) sowie ein gebrauchter Druckball aus unterschiedlichen Fallhöhen senkrecht auf verschiedene Böden, nämlich einem Klassenzimmerboden und einem Tennishallenboden, fallengelassen.

Aus Abbildung 20 ist zu erkennen, dass der Elastizitätskoeffizient für jeden Ball und jeden Bodenbelag bei steigender Anfangshöhe deutlich sinkt, der mechanische Energieverlust also steigt. Dies könnte einerseits an höheren Reibungskräften beim Prellen des Tennisballes oder aber an der größeren Luftreibung wegen dem höheren Tempo liegen. Um einen Tennisball auf Regelkonformität zu testen, ist es demnach zwingend erforderlich, ihn wie beim Versuchsaufbau des Internationalen Tennisverbandes aus

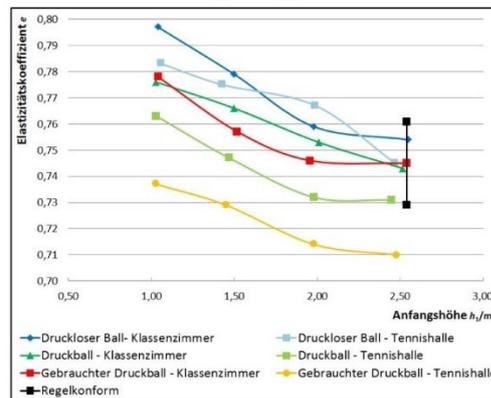


Abb. 20: Elastizitätskoeffizient e in Abhängigkeit von der Anfangshöhe h_1

254 cm fallenzulassen [14]. Zudem fällt in Abbildung 20 auf, dass die Rücksprunghöhe bzw. der Elastizitätskoeffizient auf dem Teppichboden der Tennishalle geringer ist als im Klassenzimmer. Der Tennisball wird beim Prellen auf dem Teppichboden folglich stärker gedämpft.

5. Drehbewegungen bei Tennisschlägen

Neben der vorgestellten dynamischen (Abschnitt 3) und energetischen (Abschnitt 4) Betrachtung sind auch kinematische Betrachtungen möglich. Beispielsweise kann die Bewegung von Tennisaufschlägen analysiert werden.

Mit Hilfe des Videoanalyseprogramms *measure dynamics* können die Bahnkurven und die Geschwindigkeit des Handgelenks und der Tennisschlägerspitze betrachtet werden. Vieles ist schon anhand einer Abbildung erkennbar, bei der in konstanten zeitlichen Abschnitten die Schulter, das Handgelenk sowie die Tennisschlägerspitze markiert werden (siehe Abb. 21, bei 210 fps jeder fünfte Ort markiert, also effektiv 35 fps). Aus dieser Abbildung ist zu erkennen, dass sowohl die Tennisschlägerspitze (blau) als auch das Handgelenk (rot) grob eine Kreisbahn beschreiben. Die Bahnkurve des Handgelenks ist dabei nicht geschlossen, während die Bahnkurve der Tennisschlägerspitze fast geschlossen ist. Des Weiteren ist zu erkennen, dass die Schulter (grün) sich während des Aufschlags nur wenig bewegt, näherungsweise also einem Drehzentrum gleicht. Tennisschlägerspitze und Handgelenk beschreiben so grob eine Kreisbewegung mit der Schulter als Drehzentrum. Aufgrund der größeren Entfernung der Tennisschlägerspitze zum Drehzentrum ist gemäß der Beziehung für Kreisbewegungen

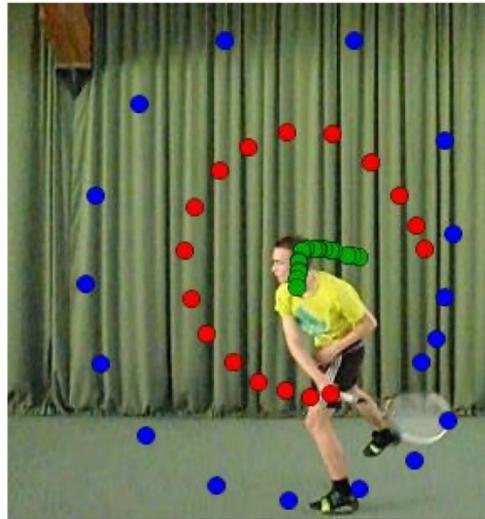


Abb. 21: Bahnkurve von Schulter (grün), Handgelenk (rot) und Tennisschlägerspitze (blau), $\Delta t = 29 \text{ ms}$

$$v = \omega \cdot r \quad \{7\}$$

mit der Entfernung zum Drehzentrum r und der Winkelgeschwindigkeit ω das Tempo v der Tennisschlägerspitze größer. In Abbildung 21 ist dies daran zu erkennen, dass die Orte der Tennisschlägerspitze weiter auseinander liegen als die Orte des Handgelenks. Um das Momentantempo zu berechnen, sind jedoch mehr Messwerte nötig (alle Bilder bei 210 fps). Die Tennisschlägerspitze erreicht ihr maximales Tempo von $v = 40 \text{ m/s} = 140 \text{ km/h}$ genau im Moment des Ballkontaktes, während das Handgelenk nur ein Tempo von $v = 11 \text{ m/s} = 40 \text{ km/h}$ erreicht.

Um den Tennisaufschlag nun weiter zu analysieren, bietet es sich an, die bereits markierten Orte von Schulter und Handgelenk sowie von Handgelenk und Tennisschlägerspitze jeweils in Form einer Linie verbinden zu lassen (siehe Abb. 22). In Abbildung 22 ist zu erkennen, dass zu Beginn der Aufschlagsbewegung der Tennisschläger im rechten Winkel zum Schlagarm steht und vom Schlagarm aus nach rechts zeigt (Zeitpunkt 1). Am Ende der Aufschlagsbewegung steht der Tennisschläger wieder im fast rechten Winkel zum Schlagarm, zeigt diesmal jedoch nach links (Zeitpunkt 3). Der Tennisschläger hat das Handgelenk quasi „überholt“. Dies liegt an der Einwärtsrotation des Handgelenks während der Durchführung des Aufschlags. Die Rotation des Handgelenks während des gesamten Tennisaufschlags beträgt

insgesamt fast 180° . Die stärkste Rotation liegt dabei kurz vor dem Treffpunkt mit dem Ball vor; zwischen Zeitpunkt 1 und Zeitpunkt 2 in Abbildung 22 dreht sich das Handgelenk um ca. 70° . Sind die Kamera- und Analyseeigenschaften bekannt, so lassen sich auch Winkelgeschwindigkeiten gemäß der Beziehung

Zeitpunkt 2

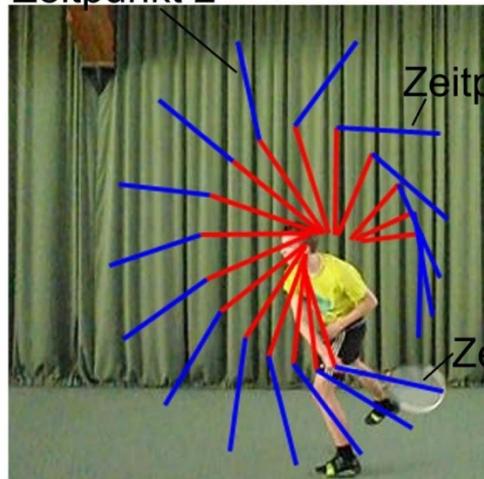


Abb. 22: Bewegung von Arm und Tennisschläger

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

berechnen. Die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Armes um die Schulter (rote Linie in Abb. 22) ergibt sich zwischen den Zeitpunkten 1 und 2 mit $\Delta\varphi = 36^\circ$ zu $\bar{\omega} = 13 \text{ s}^{-1}$. Wäre der Schläger nur die geradlinige Verlängerung des Armes, hätte die Schlägerspitze gemäß Gleichung {7} mit der Entfernung $r = 1,3 \text{ m}$ zur Schulter nur ein Tempo von $v = r \cdot \omega = 17 \text{ m/s} = 60 \text{ km/h}$, während das durchschnittliche Tempo in diesem Zeitintervall 120 km/h beträgt.

Die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Handgelenks und damit des Schlägers bzgl. des Arms (die blaue Linie in Abb. 22) ergibt sich zwischen den Zeitpunkten 1 und 2 zu $\bar{\omega} = 26 \text{ s}^{-1}$. Gäbe es nur diese Einwärtsrotation des Handgelenks ohne die Rotation des Armes um die Schulter (ruhender Arm), hätte die Tennisschlägerspitze gemäß Gleichung {7} mit der Entfernung zum Handgelenk $r = 0,685 \text{ m}$ immerhin schon ein beachtliches Tempo von $v = r \cdot \omega = 18 \text{ m/s} = 64 \text{ km/h}$. Eine alternative Darstellungsmöglich-



Abb. 23: Stroboskopbild eines Tennisaufschlags, $\Delta t = 3,3 \text{ ms}$

keit des Tennisaufschlags zur Analyse ist die Erstellung eines Stroboskopbildes. Aus der Abbildung 23 (jeder siebte Frame bei 210 fps ist effektiv 30 fps) ist auch die kreisförmige Bewegung des Handgelenks und der Tennisschlägerspitze zu erkennen, während der Rumpf sich nur relativ wenig bewegt. In diesem Stroboskopbild fällt auch auf, dass im Bereich des Balltreffpunkts größere Abstände zwischen den Einzelbildern vorliegen als zu Beginn und zum Ende der Aufschlagsbewegung. Hat das Objekt zwischen zwei Einzelbildern nun eine größere Strecke zurückgelegt, so war sein Tempo größer. Werden auf dem Stroboskopbild das Handgelenk und die Tennisschlägerspitze betrachtet, so erkennt man auch hier anhand der unterschiedlichen Abstände im Bereich des Balltreffpunkts, dass die Tennisschlägerspitze ein viel größeres Tempo besitzt als das Handgelenk.

Der Mehrwert der Veranschaulichung des Bewegungsablaufs mit Hilfe eines Stroboskopbildes ist die hohe Anschaulichkeit für Schüler. Außerdem erfolgt die Erstellung des Stroboskopbildes im Gegensatz zur vorherigen Analyse ohne größere Einstellungen in einer Videoanalysesoftware; es wird lediglich ein Video aufgenommen und ohne viel Arbeitsaufwand qualitativ analysiert. Besonders einfach können solche Stroboskopbilder in Echtzeit mit der Freeware-Software „Live Video Strobe“ und einer Webcam erstellt werden, bei der man vorher kein Video aufnehmen muss [15].

6. Fazit

Tennis eignet sich sehr gut zur Anwendung im Physikunterricht, wodurch verschiedene Themenbereiche der Mechanik, wie zum Beispiel Kräfte, die Energieerhaltung und –umwandlung, der schiefe Wurf, der Magnus-Effekt und Kreisbewegungen behandelt werden können. Die dargestellten Versuche sind weniger zur Einführung, sondern vielmehr zur Anwendung, zur Vertiefung sowie zur Herstellung eines Praxisbezugs geeignet.

Der Physikunterricht kann hier auch durch einen Ortswechsel belebt werden, da die Versuche teilweise außerhalb des Klassenzimmers durchgeführt werden müssen. Hier bietet sich speziell eine fachübergreifende Zusammenarbeit mit dem Schulfach Sport an, da die erzielten Ergebnisse sowohl für die Physik als auch für den Sport interessant sind.

Literatur

- [1] Egidy, Benedikt (2013): Game, Set and Match. Schulversuche zu Tennis im Physikunterricht, Staatsexamensarbeit, Universität Würzburg, www.thomas-wilhelm.net/arbeiten/tennis.htm
- [2] Tipler, Paul A.; Mosca, Gene (2009): Physik für Wissenschaftler und Ingenieure. 6. Deutsche Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg
- [3] Wiesner, Hartmut; Wilhelm, Thomas; Waltner, Christine; Tobias, Verena; Rachel, Alexander; Hopf, Martin (2011): Mechanik I: Kraft- und Geschwindigkeitsänderung, Reihe Unterricht Physik, Band 5 Aulis Verlag

- [4] Deutscher Tennisbund e.V.: http://www.dtb-tennis.de/content/download/680/8523/version/2/file/Tennisregeln_der_ITF.pdf, zuletzt aufgerufen am 22.11.2013
- [5] Demtröder, Wolfgang (2008): Experimentalphysik 1 – Mechanik und Wärme. 5. neu bearbeitete und aktualisierte Auflage, Springer, Berlin Heidelberg New York
- [6] Ziebur, Fredi (1999): Übungsaufgaben. Teil 5. Physik in der Schule 6/37, S. 388 - 392
- [7] Wiesner, Hartmut (1994): Zum Einführungsunterricht in die Mechanik: Fachmethodische Überlegungen und Unterrichtsversuche zur Reduzierung von Lernschwierigkeiten. In: Naturwissenschaften im Unterricht – Physik, Stuttgart, Klett Verlag, Seite 16 - 23
- [8] Wilhelm, Thomas; Zimmermann, Fabian: Die Luft beim Fußballflug - In: Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule 63, Nr. 1, 2014, S. 28 – 37
- [9] Wilhelm, Thomas; Reusch, Wolfgang; Jakob, Peter: Physik mit Kick. In: Weigand, H.-G. (Hrsg.): Fußball – eine Wissenschaft für sich, Verlag Königshausen & Neumann, Würzburg, 2006
- [10] Brody, Howard; Cross, Rod; Lindsey, Crawford (2002): The Physics and Technology of Tennis. USRSA, Racquet Tech Pub. Vista, California USA
- [11] Tolan, Metin (2010): So werden wir Weltmeister – Die Physik des Fußballspiels. 1. Auflage, Piper Verlag GmbH, München
- [12] Michel, M.; Wilhelm, T.: Dynamik mit Hochgeschwindigkeitsvideos - In: Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule 59, Nr. 7, 2010, S. 23 - 30
- [13] Zimmermann, F.; Wilhelm, T.: Fußball im Physikunterricht – gemessen mit dem Computer - In: Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule 63, Nr. 1, 2014, S. 9 – 17
- [14] The International Tennis Federation: <http://www.itfennis.com/technical>, zuletzt aufgerufen am 22.11.2013
- [15] Suleder, M.; Wilhelm, T.: Stroboskopbilder in Echtzeit - In: PhyDid-B - Didaktik der Physik – Frühjahrstagung Jena 2013, 2013, www.phydid.de

Online-Ergänzung

Einige der hier vorgestellten Videos findet man mit den entsprechenden Einblendungen in den Online-Ergänzungen der Zeitschrift.

Anschriften der Verfasser

Prof. Dr. Thomas Wilhelm, Institut für Didaktik der Physik, Goethe-Universität Frankfurt am Main, Max-von-Laue-Str. 1, 60438 Frankfurt am Main, wilhelm@physik.uni-frankfurt.de;
 Benedikt Egidy, Lehrstuhl für Didaktik der Physik, Universität Würzburg, Emil-Hilb-Weg 22, 97074 Würzburg, benedikt.e@gmx.de.



Schiefer Wurf mit Luftwiderstand - Teil II

Von: **kostja**

Datum: Fr. 11. Februar 2005 14:22:01

Thema: Physik

*h*allo Leute,

ich möchte diesen Artikel allen Physikinteressierten widmen und wünsche Euch viel Spaß beim Lesen.

In dem Artikel Schiefer Wurf mit Luftwiderstand wurde bereits aufgezeigt, welchen dramatischen Einfluss Reibungskräfte auf einen bewegten Gegenstand haben und dass die idealisierten Newtonschen Bewegungsgleichungen, die wir aus der 11. Klasse her kennen, nur eine Annäherung für hinreichend kleine Geschwindigkeiten sind. Jedoch wurde in diesem Artikel die nicht zutreffende Annahme gemacht, dass "[...] die Luftwiderstandskraft proportional zur Geschwindigkeit [...], und nicht propotional zu ihrem Quadrat [...]" ist.

In diesem Artikel möchte ich die Bahnkurve für einen schräg nach oben geworfenen Gegenstand berechnen, der eine zum Quadrat seiner Geschwindigkeit proportionale Luftwiderstandskraft, erfährt.

1. Ein mathematisches Modell

Als allererstes müssen wir uns ein mathematisches Modell schaffen, das die Bewegung des geworfenen Gegenstandes beschreibt. Dazu verwenden wir einen der zwei mächtigen Ansätze der Physik: Den Kraftansatz.¹

Das zweite Newtonsche Gesetz (Lex Secunda (Grundgesetz der Mechanik)) lautet:²

Kraft = Masse · Beschleunigung

$$F = m \cdot a$$

$$(1) \quad a = \frac{F}{m}$$

Um daraus auf die Bewegung schließen zu können, müssen wir diesen Ansatz mit den Größen $s(t)$ und $v(t)$ in Verbindung bringen. In Gleichung (1) ist die Beschleunigung a nichts anderes als die Geschwindigkeitsänderung pro Zeit:

$$(2) \quad a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

und die Geschwindigkeit selbst ist definiert durch die Änderung des zurückgelegten Wegs pro Zeit:

$$(3) \quad v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

2. Daten des geworfenen Gegenstandes

Der Gegenstand den wir betrachten, soll folgende Eigenschaften haben:

Geometrie	Kugel ³
c_w - Wert:	0.45
Radius:r	0.060m
Masse:m	7.275kg
Abwurfwinkel: φ	45°
Anfangsgeschwindigkeit: $\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\varphi \\ v_0 \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \left[\frac{m}{s} \right] \\ 100 \left[\frac{m}{s} \right] \end{pmatrix}$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ soll sich der Körper im Koordinatenursprung befinden.

Damit haben wir nun alles, was wir brauchen. Fangen wir also an.

3. Der reibungsfreie Wurf

Zunächst möchte ich den schrägen Wurf ohne Reibung behandeln, damit wir die Bahnkurven später vergleichen können. Die Bewegung eines schräg geworfenen Gegenstandes setzt sich aus der Bewegung in horizontaler und vertikaler Richtung zusammen.

3.1 horizontal:

In horizontaler Richtung erfährt der geworfene Körper keine Kraft.

Aus Gleichung (1) folgt somit:

$$a = 0$$

und aus Gleichung (2) bekommen wir:

$$\frac{d(\dot{x})}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \text{konst.}$$

Die Geschwindigkeit \dot{x} in horizontaler Richtung bleibt also stets konstant

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0.$$

Durch Einsetzen in Gleichung (3) bekommen wir endlich:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \dot{x}_0 \Rightarrow dx = \dot{x}_0 dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t \dot{x}_0 dt \\ \Rightarrow x - x_0 &= \dot{x}_0 (t - t_0) \end{aligned}$$

Da der Körper sich zum Zeitpunkt t_0 im Ursprung befindet, ist $t_0 = 0$

und $x_0 = 0$. Die Bewegung in horizontaler Richtung wird also beschrieben durch:

$$(4) \quad x(t) = \dot{x}_0 t$$

3.2 vertikal:

In vertikaler Richtung erfährt der Körper stets die konstante Erdanziehungskraft F_G , womit sich für die Beschleunigung folgendes ergibt:

$$a = \frac{F_G}{m} = -\frac{m \cdot g}{m} = -g$$

Die Beschleunigung ist negativ, weil die Kraft F_G auf der y -Achse nach "unten" wirkt. Wegen Gleichung (2) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d(\dot{y})}{dt} &= -g \Rightarrow d(\dot{y}) = -g dt \Rightarrow \int_{\dot{y}_0}^{\dot{y}} d\dot{y} = \int_{t_0=0}^t -g dt \\ \Rightarrow \dot{y} - \dot{y}_0 &= -g (t - 0) \\ \dot{y} &= -g \cdot t + \dot{y}_0 \end{aligned}$$

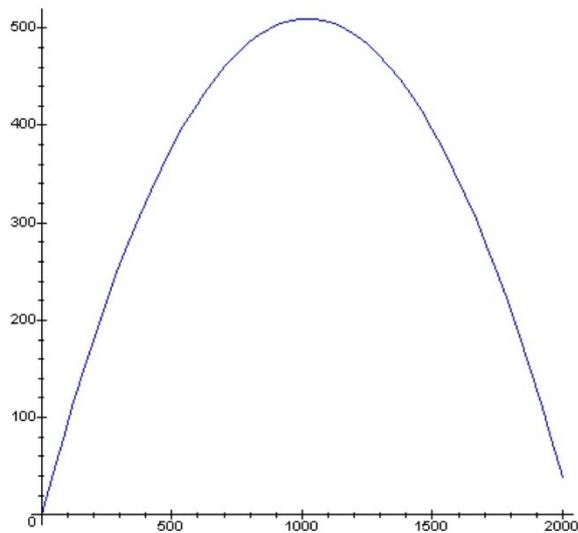
Analog zum obigen Fall setzen wir dies nun in Gleichung (3) ein und bekommen so die Bewegung in vertikaler Richtung:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = -g \cdot t + \dot{y}_0 \Rightarrow dy = [-g \cdot t + \dot{y}_0] dt \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t [-g \cdot t + \dot{y}_0] dt \\ (5) \quad \Rightarrow y(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + \dot{y}_0 t \end{aligned}$$

3.3 Bahnkurve:

Wir haben nun die Bewegung in x - und in y - Richtung vollständig beschrieben. Beide Funktionen sind über den Parameter t verknüpft. Man könnte jetzt eine der Gleichungen (vorzugsweise die einfachere Gleichung **(4)**) nach t auflösen und in Gleichung **(5)** einsetzen. Da dieser Weg jedoch nicht immer so einfach wie in diesem Fall ist und nicht jede Gleichung sich ohne Probleme nach dem Parameter auflösen lässt, bevorzuge ich die parametrisierte Darstellung.

Der geworfene Gegenstand befindet sich im Punkt $P(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_0 t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + \dot{y}_0 t \end{pmatrix}$



4. Wurf mit Luftreibung

Beim Wurf mit Luftreibung wird die Bewegung des geworfenen Gegenstandes durch die Luftwiderstandskraft F_w beeinflusst. Diese Kraft ist aus der Aerodynamik bekannt und wahrscheinlich ist die Gleichung dem Einen oder Anderen bereits untergekommen:

$$F_w = \frac{1}{2} \rho c_w A v^2$$

ρ ist die Dichte des Mediums, durch das sich der Gegenstand bewegt. Für die Bahnkurven möchte ich dafür die Dichte der Luft unter Normalbedingungen

($T = 0^\circ\text{C}$, $p = 1013\text{hPa}$) $\rho = 1.293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ verwenden. Der c_w - Wert stellt

den Einfluss der Geometrie dar. Dieser Wert wird in der Regel experimentell bestimmt und hängt sowohl von der Form als auch von der Oberflächenbeschaffenheit ab. Ebenso ist dieser Wert geschwindigkeitsabhängig. Zur Vereinfachung möchte ich jedoch annehmen, dass sich dieser Wert während der Bewegung nicht ändert. A ist die sog. Stirnfläche des Körpers. Es ist die in Bewegungsrichtung projizierte Fläche des Gegenstands. In unserem Fall, einer Kugel, entspricht sie einem Kreis mit der Fläche $A = \pi r^2 = 0.045\text{m}^2$. Den Ausdruck $\left(\frac{1}{2} \rho c_w A \right)$ werde ich zukünftig mit k abkürzen.

Wenn wir nun den schrägen Wurf mit Luftwiderstand betrachten, wird es notwendig sein, die Bewegung in drei Abschnitte einzuteilen. Die Bewegung in horizontaler Richtung. Die Bewegung aufwärts während der Aufstiegsphase. Und ab dem Umkehrpunkt, zum Zeitpunkt t_U , die Bewegung abwärts.

EDIT (28.11.2007) Wir gehen hier von der Näherung aus, dass sich die DGL in Aufwärts - und Abwärtsrichtung entkoppeln lässt!

4.1 horizontal:5

Bei der Bewegung in horizontaler Richtung erfährt der Gegenstand ausschließlich die Luftwiderstandskraft F_w , so dass diese allein die auf den Körper wirkende Gesamtkraft ausmacht. Gleichung (1) können wir in diesem Fall also so formulieren:

$$F = m \cdot a = -k v^2$$

Das Minuszeichen resultiert daraus, dass die Kraft stets entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung wirkt. Nach der Division durch m und einsetzen

der Beziehung $a = \dot{v}$ kommen wir schließlich auf die Differentialgleichung⁴

$$\dot{v} = -\frac{k}{m} v^2$$

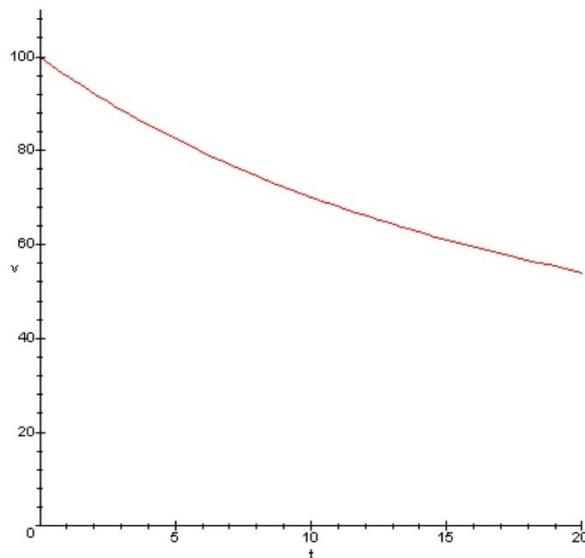
die wir durch Trennung der Veränderlichen zu Leibe rücken.

$$\begin{aligned} \dot{v} = \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v^2 &\Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} dt \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{1}{v^2} dv = \int_0^t -\frac{k}{m} dt \\ &\Rightarrow -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -\frac{k}{m} t \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{k}{m} t + \frac{1}{v_0} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{\frac{k}{m} t + \frac{1}{v_0}} \end{aligned}$$

Da es sich hier um die Bewegung in x Richtung handelt, schreiben wir:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\frac{k}{m} t + \frac{1}{v_0}}$$

Die Geschwindigkeit in x - Richtung ist also in 1. Näherung proportional zu $\frac{1}{t}$:

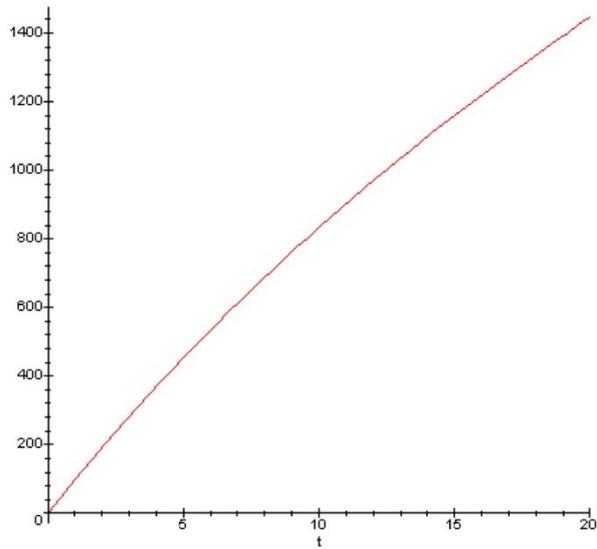


Um auch noch $s(t)$ zu erhalten, gehen wir mit der erhaltenen Gleichung in Gleichung (3) rein und kommen auf:

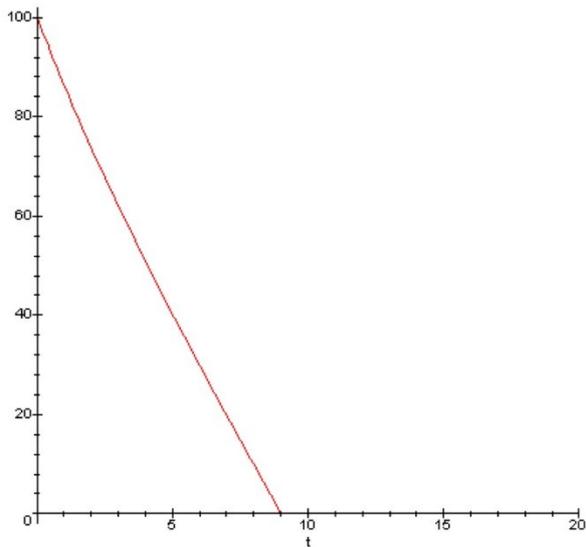
$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{1}{\frac{k}{m} t + \frac{1}{\dot{x}_0}} \Rightarrow dx = \frac{dt}{\frac{k}{m} t + \frac{1}{\dot{x}_0}} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{dt}{\frac{k}{m} t + \frac{1}{\dot{x}_0}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{m}{k} \left(\ln \left(\frac{k}{m} t + \frac{1}{\dot{x}_0} \right) - \ln \left(\frac{1}{\dot{x}_0} \right) \right) = \frac{m}{k} \ln \frac{\frac{k}{m} t + \frac{1}{\dot{x}_0}}{\frac{1}{\dot{x}_0}}$$

$$(6) \quad \Rightarrow x(t) = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{k}{m} \dot{x}_0 t + 1 \right)$$



4.2 aufwärts:⁶



Wie schon so oft, folgt die Funktion $s(t)$ aus Gleichung **(3)**:

$$\frac{dy_I}{dt} = \dot{y}_I = v_\infty \cdot \tan \left(\arctan \frac{\dot{y}_0}{v_\infty} - \frac{g}{v_\infty} \cdot t \right)$$

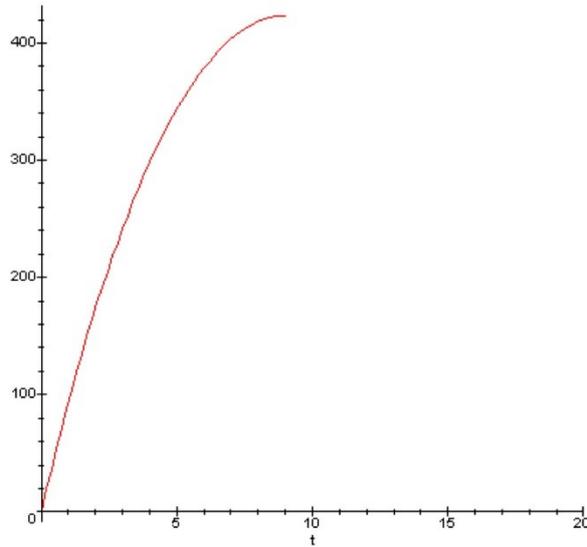
$$dy_I = v_\infty \cdot \tan \left(\arctan \frac{\dot{y}_0}{v_\infty} - \frac{g}{v_\infty} \cdot t \right) \cdot dt$$

$$\int_0^{y_I} dy_I = v_\infty \cdot \int_0^t \tan \left(\arctan \frac{\dot{y}_0}{v_\infty} - \frac{g}{v_\infty} \cdot t \right) dt$$

Für diese Stammfunktion habe ich hier im Forum Hilfe erhalten.

$$\Rightarrow y_I(t) = \frac{m}{k} \cdot \ln \left(\frac{\cos \left(\arctan \frac{\dot{y}_0}{v_\infty} - \frac{g}{v_\infty} \cdot t \right)}{\cos \left(\arctan \frac{\dot{y}_0}{v_\infty} \right)} \right) \quad \text{für } t \leq t_U$$

$$\text{(8)} \quad y_I(t) = \frac{v_\infty^2}{g} \cdot \left(\ln \cos \frac{g(t_U - t)}{v_\infty} - \ln \cos \frac{gt_U}{v_\infty} \right) \quad \text{für } t \leq t_U$$



4.3 abwärts:⁵

Bei der Abwärtsbewegung hat der Gegenstand zum Umkehrzeitpunkt t_U die Geschwindigkeit $\dot{y}(t_U) = 0$ und er hat bereits den Weg

$$y_U = y_I(t_U) = \frac{v_\infty^2}{g} \cdot \ln \frac{1}{\cos\left(\frac{gt_U}{v_\infty}\right)} = \frac{v_\infty^2}{2g} \cdot \ln \left(1 + \frac{\dot{y}_0^2}{v_\infty^2} \right)$$

zurückgelegt. Für die Kräftebilanz müssen wir beachten, daß die Gewichtskraft jetzt in Bewegungsrichtung wirkt, also entgegengesetzt zur Luftwiderstandskraft.

$$F = m \cdot a = k \cdot v^2 - m g$$

Aus obiger Gleichung erhalten wir nun folgende Differentialgleichung vom RICATTIischen Typ⁷.

Um diese zu lösen, brauchen wir eine partikuläre Lösung⁸, die wir erhalten können, wenn wir einen besonderen Fall betrachten:

Der Gegenstand wird solange beschleunigt fallen, bis er den stationären Zustand erreicht hat und mit konstanter Geschwindigkeit weiter fallen wird. Dieser Zustand tritt genau dann ein, wenn sich die Gewichtskraft und die Luftwiderstandskraft gegenseitig kompensieren:

$$F = m \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} v^2 = g \Rightarrow v = -\sqrt{\frac{m}{k} g} = -v_\infty < 0, \text{ weil in } v = \frac{dy}{dt} \text{ } dy < 0 \text{ und } dt > 0 \text{ ist.}$$

$$\Rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{m}{k} g} > 0$$

⁷ deswegen, weil dieser Zustand erst für $t \rightarrow \infty$ erreicht sein wird
<https://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/print.php?sid=735>

v_∞ beschleunigt, weil dieser Zustand erst für $v \rightarrow v_\infty$ erreicht sein wird.

Der Riccatische Ansatz für unsere DGL lautet also:

$$v(t) = -(v_\infty - v_R); \dot{v} = \dot{v}_R$$

mit der noch unbekanntem Funktion v_R ($0 \leq v_R < v_\infty$).

Eingesetzt in die Differentialgleichung bekommen wir nach etwas Umformarbeit:

$$\dot{v}_R + 2 \frac{k}{m} v_\infty v_R - \frac{k}{m} v_R^2 - \frac{k}{m} v_\infty^2 = -g$$

Da aber $\frac{k}{m} v_\infty^2 = g$ ist, folgt für obige Gleichung

$$\dot{v}_R + 2 \frac{k}{m} v_\infty v_R - \frac{k}{m} v_R^2 = 0$$

womit wir eine BERNOULLI'sche DGL⁹ erhalten haben, die sich nach Division

durch $-v_R^2$ und durch die Substitution $u = v_R^{-1}$ auf die Form einer linearen

Differentialgleichung bringen lässt:

$$\dot{u} - 2 \frac{k}{m} v_\infty u = -\frac{k}{m}$$

Zur Abkürzung schreiben wir an dieser Stelle

$$p = 2 \frac{k}{m} v_\infty$$

Die Lösung $u_h(t)$ der homogenen Gleichung

$$\dot{u}_h - p u_h = 0$$

erhält man durch Trennung der Veränderlichen

$$\frac{du_h}{dt} = p u_h \Rightarrow \int_{u_0}^{u_h} \frac{du_h}{u_h} = \int_{t_U}^t p \cdot dt$$

$$\ln u_h - \ln u_0 = p (t - t_U)$$

$$\ln \left(\frac{u_h}{u_0} \right) = p (t - t_U)$$

$$\Rightarrow u_h = u_0 e^{p(t-t_U)}$$

Da die hier vorliegende DGL eine DGL mit konstanten Koeffizienten ist,

können wir uns den Ansatz mit der Variation der Konstanten Gott sei

Dank sparen und können für die partikuläre Lösung ein Polynom 0. Grades

ansetzen, weil die Störfunktion $-\frac{k}{m}$ ebenfalls ein Polynom 0. Grades

ist.

$$u_p = B \cdot t^0 = B \Rightarrow \dot{u}_p = 0$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, erhalten wir:

$$\Rightarrow 0 - pB = -\frac{k}{m} \Rightarrow B = \frac{k}{mp} = \frac{1}{2 v_\infty}$$

$$\Rightarrow u_p = \frac{1}{2 v_\infty}$$

Damit haben wir als Lösung der linearen Differentialgleichung

$$u = u_0 e^{p(t-t_U)} + \frac{1}{2 v_\infty} = \frac{u_1 e^{p(t-t_U)} + 1}{2 v_\infty}$$

u_1 ist einfach nur eine andere Integrationskonstante.

Um auf die Lösung unserer Ausgangsgleichung zu kommen, müssen wir nur noch u zurückschreiben:

$$u = v_R^{-1} \Rightarrow v_R = \frac{2 v_\infty}{u_1 e^{p(t-t_U)} + 1}$$

Damit folgt aus $v = -(v_\infty - v_R)$:

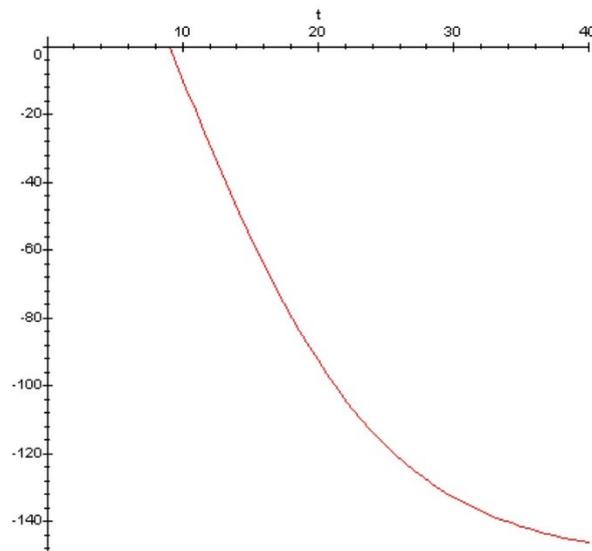
$$v(t) = -\left(v_\infty - \frac{2 v_\infty}{u_1 e^{p(t-t_U)} + 1} \right)$$

Aus der Bedingung $v(t_U) = 0$ können wir die unbekannte Integrationskonstante u_1 ermitteln:

$$v(t_U) = -v_\infty + \frac{2 v_\infty}{u_1 e^{p \cdot 0} + 1} = 0$$

$$\Rightarrow -v_\infty (u_1 + 1) + 2 v_\infty = 0 \Rightarrow u_1 + 1 = 2 \Rightarrow u_1 = 1$$

$$\Rightarrow \dot{y}_{II}(t) = -\left(v_\infty - \frac{2 v_\infty}{1 + e^{p(t-t_U)}} \right) = -v_\infty \cdot \frac{e^{p(t-t_U)} - 1}{e^{p(t-t_U)} + 1} \quad \text{für } t \geq t_U$$



Mit Hilfe von Gleichung (3) erhalten wir auch hier wieder die Wegsfunktion

$y_{II}(t)$:

$$\frac{d(y_{II})}{dt} = \dot{y}_{II} = -v_{\infty} + \frac{2 v_{\infty}}{e^{p(t-t_U)} + 1}$$

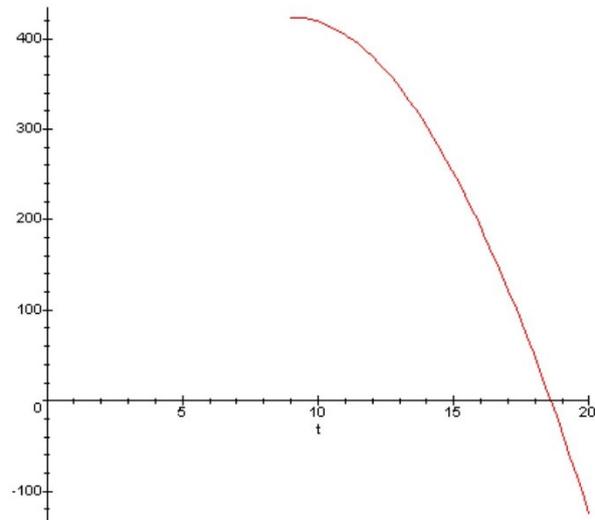
$$\frac{d(y_{II})}{dt} = -v_{\infty} + \frac{2 v_{\infty} e^{-p(t-t_U)}}{1 + e^{-p(t-t_U)}}$$

$$\frac{d(y_{II})}{dt} = -v_{\infty} - \frac{m}{k} \frac{-p e^{-p(t-t_U)}}{1 + e^{-p(t-t_U)}}$$

$$\Rightarrow \int_{y_U}^{y_{II}} dy_{II} = \int_{t_U}^t \left(-v_{\infty} - \frac{m}{k} \frac{-p e^{-p(t-t_U)}}{1 + e^{-p(t-t_U)}} \right) dt$$

$$\Rightarrow y_{II} - y_U = -v_{\infty} (t - t_U) - \frac{m}{k} \cdot \ln \frac{1 + e^{-p(t-t_U)}}{2}$$

$$(9) \quad \Rightarrow y_{II}(t) = y_U - v_{\infty} (t - t_U) - \frac{m}{k} \ln \left(\frac{1}{2} e^{-p(t-t_U)} + \frac{1}{2} \right) \text{ für } t \geq t_U$$



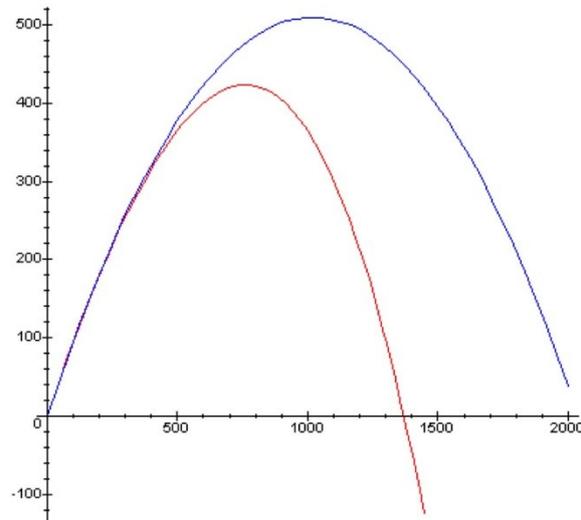
4.4 Bahnkurve:

Nun haben wir die Bewegung in x - Richtung als auch in y - Richtung vollständig beschrieben. Hier kommt nun endlich der Graph, für den ihr Euch so mühsam durch diesen Artikel gekämpft habt. Ihr habt es Euch verdient! *g*
Der geworfene Gegenstand hält sich zum Zeitpunkt t in dem Punkt

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \frac{v_{\infty}^2}{g} \cdot \begin{pmatrix} \ln \left(1 + \frac{\dot{x}_0 \cdot g \cdot t}{v_{\infty}^2} \right) \\ \ln \cos \frac{g(t_U - t)}{v_{\infty}} - \ln \cos \frac{gt_U}{v_{\infty}} \end{pmatrix} & \text{für } t \leq t_U \\ \frac{v_{\infty}^2}{g} \cdot \begin{pmatrix} \ln \left(1 + \frac{\dot{x}_0 \cdot g \cdot t}{v_{\infty}^2} \right) \\ -\frac{g(t - t_U)}{v_{\infty}} - \ln \left(\frac{1 + e^{-\frac{2g(t-t_U)}{v_{\infty}}}}{2} \cdot \cos \frac{gt_U}{v_{\infty}} \right) \end{pmatrix} & \text{für } t \geq t_U \end{cases}$$

auf.



Jetzt wäre es noch interessant zu wissen, bei welchem Abwurfwinkel φ sich das Maximum der Wurfweite befindet, aber dazu habe ich nicht mehr den Nerv! Vielleicht hat jemand Lust sich die Mühe zu machen, so soll er es mir bitte bitte mitteilen.

Ich hoffe, Ihr habt es genossen, diesen Artikel - hey, es war mein erster - zu lesen.

Ich wünsche Euch noch eine schöne Zeit auf dem Matheplaneten.

mFG Konstantin

PS.:

Ich möchte an dieser Stelle allen danken, die mir in den Foren weitergeholfen haben. Insbesondere einen recht herzlichen Dank an:



Franz



Helge

die diesen Artikel noch einmal korrekturgelesen haben.

¹ Der zweite ist der Energieerhaltungssatz

² cf. de.wikipedia.org/wiki/Newton-Axiome Aufgerufen am: 08.02.2005 - 16:34

³ Ich habe eine Kugel gewählt um Effekte wie den Auftrieb, die ich hier nicht behandeln möchte, zu vermeiden.

⁴ Mehr zu Differentialgleichungen findet sich auf dem Matheplaneten in der Ganz genau Reihe Ebenfalls zu empfehlen ist das Buch *Heuser, H: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Wiesbaden, 2004*⁴, das eine hervorragende, ausführliche und anhand anschaulicher Beispiele gut verständliche Einführung in das Gebiet der DGLen bietet.

⁵ Den horizontalen Fall und den Fall abwärts habe ich bereits hier im Forum schon einmal angesprochen. Man beachte aber vor allem den Beitrag von von Jonas_Rist am Sa. 12. Februar 2005 20:04:38. Hier findet sich eine viel einfachere Rechnung für Abschnitt 4.3.

⁶ Dieser Fall findet sich ebenfalls im Forum

⁷ RICCATIsche DGL: siehe hier auf dem Matheplaneten

⁸ Eine partikuläre Lösung ist eine beliebige Lösung der Differentialgleichung

⁹ BERNOULLIsche DGL: siehe hier auf dem Matheplaneten

Dieser Artikel kommt von Matroids Matheplanet
<https://matheplanet.de>

Die Url für diesen Artikel ist:
<https://matheplanet.de/default3.html?article=735>

Literaturverzeichnis

[1] Metin Tolan: So werden wir Weltmeister - Die Physik des Fußballspiels. München 2010.

[2] kostja: Physik-Schiefer Wurf mit Luftwiderstand-Teil (eingestellt am 11.02.2005)
<https://matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=735&ref=https%3A%2F%2Fwww.google.com%2F> (letzter Zugriff 24.03.2020).

[3] Benedikt Egidy, Thomas Wilhelm: Physikunterricht und Tennis.
<http://www.thomas-wilhelm.net/veroeffentlichung/Tennis.pdf> (letzter Zugriff 24.03.2020).

[4] Joachim Krause, Joachim Grehn: Metzler – Physik. Braunschweig 2020

Abbildung 2: https://de.wikipedia.org/wiki/Magnus-Effekt#/media/Datei:Magnus_effect_Str%C3%B6mung.png (letzter Zugriff 24.03.2020).

Hilfsmittel

Kostenloses Videoanalyseprogramm: Viana.NET

Link zum Download: <http://www.viananet.de/downloads>

Ich versichere, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen Quellen als Hilfsmittel als die angegebenen benutzt und die Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen sind, in jedem einzelnen Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe. Das Gleiche gilt auch für beigegebene Zeichnungen, Kartenskizzen und Darstellungen.